

Practice Integrals

A facility with integration will help with the execution of more sophisticated problems in this and other courses in the Mathematics Tripos. This sheet is intended for self-study, and answers are given on the back. Do let me know of any errors: nbg23@damtp.cam.ac.uk.

Find the indefinite integral $\int f(x)dx$ when $f(x)$ is given by:

Section 1. These integrals are fundamental. If you can't do these then you should consult a text book, colleague or supervisor and learn the answers by rote.

- | | | | |
|---------|------------------|-------------|--------------------|
| 1) 1 | 3) $\frac{1}{x}$ | 5) $\sin x$ | 7) $\sec^2 x$ |
| 2) $2x$ | 4) e^x | 6) $\cos x$ | 8) $\sec x \tan x$ |

Section 2. A little pre- or post-processing required.

- | | | |
|----------------|-----------------------------|--|
| 9) x^2 | 13) $\sin 3x$ | 17) $(x + 2)(x + 3)$ |
| 10) e^{5x} | 14) $\sqrt{x^5}$ | 18) e^{5x+3} |
| 11) \sqrt{x} | 15) $(1 + x)^{\frac{1}{4}}$ | 19) $(x^3 - x^5)/\sqrt{x}$ |
| 12) x^{-1} | 16) x^{1066} | 20) $\frac{2+x}{(1+x)^2}$ [Hint: $2 + x = 1 + x + 1$] |

Section 3. An obvious theme (I hope!)

- | | | |
|-----------------------|------------------------|--------------------------------------|
| 21) $2x(3 + x^2)$ | 24) $xe^{x^2/2}$ | 27) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ |
| 22) $2x \sin x^2$ | 25) $x(1 - x^2)^{1/2}$ | 28) $\cot x$ |
| 23) $\cos x \sin^3 x$ | 26) $\sec^2 x \tan x$ | |

Section 4. Integration by parts.

29) $x e^x$ 30) $x^2 \sin x$ 31) $\ln x$ 32) $e^x \sin x$

Section 5. Easy – if you know your trig. identities!

33) $\cos x \sin^3 x$ 36) $\sin 3x \cos x$ 39) $\sin^4 x$
34) $\sin^3 x$ 37) $\sin 2x \sin x$ 40) $\sec^4 x$
35) $\cos^2 x$ 38) $2 \sin x \cos x$ 41) $\sin^2 x \cos^3 x$

Section 6. Partial fractions and division (Beware the Jabberwock)

42) $\frac{1}{1-x}$ 44) $\frac{x}{(1-x)(2-x)}$ 46) $\frac{2x^2}{1-x^2}$ 48) $\frac{x^2}{1+x^3}$
43) $\frac{1}{(1-x)(2-x)}$ 45) $\frac{4}{4-x^2}$ 47) $\frac{2x^3}{1-x^2}$ 49) $\frac{1}{x^2(1-x^2)}$

Section 7. Substitution is often a good thing.

50) $\sqrt{1+x}$ 53) $\sqrt{1-x^2}$ 56) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
51) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 54) $\sin \sqrt{1-x}$ 57) $\frac{1}{1-x^2}$
52) $\frac{1}{1+x^2}$ 55) $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

Section 8. Miscellaneous – How imaginative are you?

58) $\frac{2x+1}{x^2+x-6}$ 59) $\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$
60) $\frac{2-x}{\sqrt{2x-x^2}}$ 61) $\frac{1+2x}{(1+x^2)(2-x)}$
62) $\frac{4+2x}{\sqrt{4-x^2}}$ 63) $\frac{2}{1-x^4}$
64) $\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$ 65a) $\frac{4x}{4+x^4}$
65b) $\frac{4x}{4+x^4}$ using the substitution $4+x^4 = (2+2x+x^2)(2-2x+x^2)$.
66) $\sqrt{\tan x}$ – Only for the most ambitious. (Solving (65b) might help.)

Practice Integrals – Solutions

All answers should include a constant of integration.

- 1) x 2) x^2 3) $\ln x$ 4) e^x 5) $-\cos x$ 6) $\sin x$
- 7) $\tan x$ 8) $\sec x$ 9) $\frac{1}{3}x^3$ 10) $\frac{1}{5}e^{5x}$ 11) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ 12) $\ln x$
- 13) $-\frac{1}{3}\cos 3x$ 14) $\frac{2}{7}\sqrt{x^7}$ 15) $\frac{4}{5}(1+x)^{5/4}$ 16) $\frac{x^{1067}}{1067}$ 17) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x$
- 18) $\frac{1}{5}e^{5x+3}$ 19) $\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{2}{11}x^{11/2}$ 20) $\ln(1+x) - (1+x)^{-1}$ 21) $\frac{1}{2}(3+x^2)^2$
- 22) $-\cos x^2$ 23) $\frac{1}{4}\sin^4 x$ 24) $e^{x^2/2}$ 25) $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$ 26) $\frac{1}{2}\tan^2 x$
- 27) $-\ln \cos x$ 28) $\ln \sin x$ 29) $xe^x - e^x$ 30) $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$
- 31) $x \ln x - x$ 32) $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$ 33) $\frac{1}{4}\sin^4 x$ 34) $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$
- 35) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$ 36) $-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x$ 37) $\frac{2}{3}\sin^3 x$ 38) $\sin^2 x$
- 39) $\frac{1}{32}(12x - 8\sin 2x + \sin 4x)$ 40) $\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$ 41) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x$
- 42) $-\ln(1-x)$ 43) $\ln \left[\frac{2-x}{1-x} \right]$ 44) $\ln \left[\frac{(2-x)^2}{1-x} \right]$ 45) $\ln \left[\frac{2+x}{2-x} \right]$
- 46) $-2x + \ln \left[\frac{1+x}{1-x} \right]$ 47) $-x^2 - \ln(1-x^2)$ 48) $\frac{1}{3}\ln(1+x^3)$
- 49) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln \left[\frac{1+x}{1-x} \right]$ 50) $\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}$ 51) $\sin^{-1} x$ 52) $\tan^{-1} x$
- 53) $\frac{1}{2}\sin^{-1} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$ 54) $2(u \cos u - \sin u) [u = \sqrt{1-x}]$ 55) $-\sin^{-1}(1-x)$
- 56) $-(1-x^2)^{1/2}$ 57) $\frac{1}{2}\ln \left[\frac{1+x}{1-x} \right]$ 58) $\ln(x^2 + x - 6)$ 59) $\sqrt{2x-x^2}$
- 60) $\sqrt{2x-x^2} - \sin^{-1}(1-x)$ 61) $\frac{1}{2}\ln \left[\frac{1+x^2}{(2-x)^2} \right]$ 62) $4\sin^{-1} \frac{x}{2} - 2\sqrt{4-x^2}$
- 63) $\frac{1}{2}\ln \left[\frac{1+x}{1-x} \right] + \tan^{-1} x$ 64) $-\sqrt{2x-x^2} - \sin^{-1}(1-x)$ 65) $-\tan^{-1} \left(\frac{2}{x^2} \right)$
- 66) A little too cumbersome to present here! Compare notes with a friend.