A3La
Differential Equations

M. G. Worster
Michaelmas Term 2014

Practice Integrals

A facility with integration will help with the execution of more sophisticated problems in this and other courses in the Mathematics Tripos. This sheet is intended for self-study, and answers are given on the back. Do let me know of any errors: mgw1@cam.ac.uk.

Find the indefinite integral $\int f(x)dx$ when $f(x)$ is given by:

Section 1. These integrals are fundamental. If you can't do these then you should consult a text book, colleague or supervisor and learn the answers by rote.

1) 1	3) $\frac{1}{x}$	5) $\sin x$	7) $\sec^2 x$
2) $2x$	4) e^x	6) $\cos x$	8) $\sec x \tan x$

Section 2. A little pre- or post-processing required.

9) x^2	13) $\sin 3x$	17) $(x+2)(x+3)$
10) e^{5x}	14) $\sqrt{x^5}$	18) e^{5x+3}
11) $\sqrt{x}$	15) $(1+x)^{\frac{1}{4}}$	19) $(x^3 - x^5)/\sqrt{x}$
12) x^{-1}	16) x^{1066}	20) $\frac{2+x}{(1+x)^2}$ [Hint: $2+x = 1+x+1$]

Section 3. An obvious theme (I hope!)

21) $2x(3+x^2)$	24) $xe^{x^2/2}$	27) $\tan x = \frac{\sin\ x}{\cos\ x}$
22) $2x \sin\ x^2$	25) $x(1-x^2)^{1/2}$	28) $\cot x$
23) $\cos x \sin^3 x$	26) $\sec^2 x \tan x$	

Section 4. Integration by parts.

29) xe^x 30) $x^2 \sin x$ 31) $\ln x$ 32) $e^x \sin x$

Section 5. Easy – if you know your trig. identities!

33) $\cos x \sin^3 x$ 36) $\sin 3x \cos x$ 39) $\sin^4 x$

34) $\sin^3 x$ 37) $\sin 2x \sin x$ 40) $\sec^4 x$

35) $\cos^2 x$ 38) $2 \sin x \cos x$ 41) $\sin^2 x \cos^3 x$

Section 6. Partial fractions and division (Beware the Jabberwock)

42) $\frac{1}{1-x}$ 44) $\frac{x}{(1-x)(2-x)}$ 46) $\frac{2x^2}{1-x^2}$ 48) $\frac{x^2}{1+x^3}$

43) $\frac{1}{(1-x)(2-x)}$ 45) $\frac{4}{4-x^2}$ 47) $\frac{2x^3}{1-x^2}$ 49) $\frac{1}{x^2(1-x^2)}$

Section 7. Substitution is often a good thing.

50) $\sqrt{1+x}$ 53) $\sqrt{1-x^2}$ 56) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

51) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 54) $\sin\sqrt{1-x}$ 57) $\frac{1}{1-x^2}$

52) $\frac{1}{1+x^2}$ 55) $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

Section 8. Miscellaneous – How imaginative are you?

58) $\frac{2x+1}{x^2+x-6}$ 59) $\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

60) $\frac{2-x}{\sqrt{2x-x^2}}$ 61) $\frac{1+2x}{(1+x^2)(2-x)}$

62) $\frac{4+2x}{\sqrt{4-x^2}}$ 63) $\frac{2}{1-x^4}$

64) $\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$ 65a) $\frac{4x}{4+x^4}$

65b) $\frac{4x}{4+x^4}$ using the substitution $4 + x^4 = (2 + 2x + x^2)(2 - 2x + x^2)$.

66) $\sqrt{\tan x}$ – Only for the most ambitious. (Solving (65b) might help.)

Practice Integrals – Solutions

All answers should include a constant of integration.

1) x 2) x^2 3) $\ln x$ 4) e^x 5) $-\cos x$ 6) $\sin x$

7) $\tan x$ 8) $\sec x$ 9) $\frac{1}{3}x^3$ 10) $\frac{1}{5}e^{5x}$ 11) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ 12) $\ln x$

13) $-\frac{1}{3}\cos 3x$ 14) $\frac{2}{7}\sqrt{x^7}$ 15) $\frac{4}{5}(1+x)^{5/4}$ 16) $\frac{x^{1067}}{1067}$ 17) $\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+6x$

18) $\frac{1}{5}e^{5x+3}$ 19) $\frac{2}{7}x^{7/2}-\frac{2}{11}x^{11/2}$ 20) $\ln(1+x)-(1+x)^{-1}$ 21) $\frac{1}{2}(3+x^2)^2$

22) $-\cos x^2$ 23) $\frac{1}{4}\sin^4 x$ 24) $e^{x^2/2}$ 25) $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$ 26) $\frac{1}{2}\tan^2 x$

27) $-\ln\cos x$ 28) $\ln\sin x$ 29) xe^x-e^x 30) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$

31) $x\ln x-x$ 32) $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$ 33) $\frac{1}{4}\sin^4 x$ 34) $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x$

35) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$ 36) $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x$ 37) $\frac{2}{3}\sin^3 x$ 38) $\sin^2 x$

39) $\frac{1}{32}(12x-8\sin 2x+\sin 4x)$ 40) $\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x$ 41) $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x$

42) $-\ln(1-x)$ 43) $\ln\left[\frac{2-x}{1-x}\right]$ 44) $\ln\left[\frac{(2-x)^2}{1-x}\right]$ 45) $\ln\left[\frac{2+x}{2-x}\right]$

46) $-2x+\ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$ 47) $-x^2-\ln(1-x^2)$ 48) $\frac{1}{3}\ln(1+x^3)$

49) $-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$ 50) $\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}$ 51) $\sin^{-1}x$ 52) $\tan^{-1}x$

53) $\frac{1}{2}\sin^{-1}x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$ 54) $2(u\cos u-\sin u)\ \left[u=\sqrt{1-x}\right]$ 55) $-\sin^{-1}(1-x)$

56) $-(1-x^2)^{1/2}$ 57) $\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$ 58) $\ln(x^2+x-6)$ 59) $\sqrt{2x-x^2}$

60) $\sqrt{2x-x^2}-\sin^{-1}(1-x)$ 61) $\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+x^2}{(2-x)^2}\right]$ 62) $4\sin^{-1}\frac{x}{2}-2\sqrt{4-x^2}$

63) $\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right]+\tan^{-1}x$ 64) $-\sqrt{2x-x^2}-\sin^{-1}(1-x)$ 65) $-\tan^{-1}\left(\frac{2}{x^2}\right)$

66) A little too cumbersome to present here! Compare notes with a friend.