التعريف بعلم التحليل العددي

التحليل العددي هو دراسة الخوارزميات لمسائل الرياضيات المتصلة.[1] الكلمة الرئيسة هنا هي (خوارزميات). والهدف من هذا العلم هو دراسة وتطوير خوارزميات سريعة وراسخة.[2] بعض المسائل التي يتم دراستها في هذا العلم: حل المعادلات الجبرية (الخطية و اللاخطية)[3] ، حل المعادلات التفاضلية (الجزئية)[4] ، مسائل الاستمثال[5]، إلخ.

1 الإستكمال الحدودي[6]

في هذه الفقرة، $P_n[x]$ هو الفضاء الاتجاهي للحدوديات[7] من الدرجة n.

1.1 مسألة الإستكمال

إذا كانت $x_0, \ldots, x_n$ نقاط مختلفة من فئة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، و $f_0, \ldots, f_n$ أعداد حقيقية، مسألة الإستكمال الحدودي هي عملية إيجاد حدودية $p \in P_n[x]$ بحيث

$$p(x_i) = f_i \qquad \forall i = 0, \ldots, n. \tag{1}$$

1.2 صيغة لاجرانج

لاحظ أن مسألة الإستكمال الحدودي هي عبارة عن $n+1$ معادلة خطية في $n+1$ متغير (معاملات[8] الحدودية p). صيغة لاجرانج تمثل حل صريح[9] لمسألة الإستكمال الحدودي. الصيغة تأخذ الشكل التالي:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^{n} \frac{x - x_\ell}{x_k - x_\ell}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

[1] continuous mathematics
[2] robust
[3] linear and nonlinear
[4] (partial) differential equations
[5] optimization
[6] Polynomial interpolation
[7] polynomials
[8] coefficients
[9] explicit

لاحظ أن p حدودية من الدرجة n كما هو مطلوب. لكي نبرهن أن p تحل مسألة الإستكمال فعلاً، من المفيد أن نكتب p بالصورة التالية:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)$$

حيث

$$L_k(x) := \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^{n} \frac{x - x_\ell}{x_k - x_\ell}.$$

من السهل التأكد أن $L_k(x_k) = 1$ و $L_k(x_j) = 0$ لكل $j \neq k$. إذن نرى مباشرةً أن $p(x_j) = f_j$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n$.

وحدانية[10] لنفرض أن $p \in P_n[x]$ و $q \in P_n[x]$ حلين لمسألة الإستكمال. إذن $p - q$ تتلاشى[11] عند $n + 1$ نقطة مختلفة على الأقل. بما أن $p - q$ حدودية من الدرجة n، هذا يعني أن $p - q = 0$ أي أن p و q متطابقتان.

1.3 تقدير الخطأ في عملية الإستكمال الحدودي

نستخدم الرمز $C[a,b]$ لفضاء الدوال المتصلة[12] من الفترة[13] $[a,b]$ لفئة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. ونستخدم ايضاً رمز $C^s[a,b]$ لفضاء الدوال من $[a,b]$ إلى $\mathbb{R}$ القابلة للإشتقاق s مرة، بحيث أن كل مشتقاتها متصلة.[14]

نظرية 1.1 - لتكن $f \in C^{n+1}[a,b]$ و $p \in P_n[x]$ الحدودية الإستكمالية للدالة f عند النقاط المختلفة $x_0, \ldots, x_n \in (a,b)$. إذن لكل $x \in [a,b]$ وُجد $\xi \in [a,b]$ بحيث

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \tag{3}$$

برهان. نرى أولاً أن المعادلة (3) صحيحة لكل $x \in \{x_0, \ldots, x_n\}$ لأن $p(x_j) = f(x_j)$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n$. لنفرض الآن أن x نقطة في $[a,b]$ مختلفة عن $x_0, \ldots, x_n$ ، ولنُعرف:

$$\phi(t) = f(t) - \left(p(t) + (f(x) - p(x)) \frac{\prod_{i=0}^{n} (t - x_i)}{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)} \right).$$

---

uniqueness[9]
vanishes[11]
continuous functions[12]
interval[13]
continuous derivative[14]

نشير إلى أن ϕ دالة في المتغير t (x هنا ثابت). أيضاً نلاحظ بسهولة أن $\phi(x_j) = 0$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n$, فضلاً عن $\phi(x) = 0$. إذن ϕ تتلاشى عند $n+2$ نقطة مختلفة في الفترة $[a, b]$.
بما أن ϕ قابلة للتفاضل، مبرهنة رول[15] تفيد أن بين أي جذرين متتاليين للدالة ϕ هناك جذر للدالة المشتقة ϕ'. إذن الدالة ϕ' تتلاشى عند $n+1$ نقطة مختلفة في الفترة $[a, b]$. إذا طبقنا مبرهنة رول مجدداً على ϕ' نرى أن ϕ'' تتلاشى عند n نقطة مختلفة في الفترة $[a, b]$. وهلم جرا حتى نصل إلى أن المشتقة من الرتبة $n+1$ للدالة ϕ تتلاشى عند نقطة واحدة على الأقل في الفترة (a, b)، أي أن وُجد $\xi \in (a, b)$ بحيث $\phi^{(n+1)}(\xi) = 0$. إذن

$$0 = \phi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \left(p^{(n+1)}(\xi) + (f(x) - p(x))\frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}\right) \tag{4}$$

حيث إستخدمنا المعادلة $\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\prod_{i=0}^{n}(t - x_i) = (n+1)!$. لاحظ أن $p^{(n+1)} = 0$ بما أن p حدودية من الدرجة n. بالتالي المعادلة (4) يمكن تبسيطها إلى

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - (f(x) - p(x))\frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} \tag{5}$$

وهذه تحديدا هي المعادلة (3). □

1.4 مثال رنجى[16]

في هذا المثال نستكمل قِيَم الدالة $f(x) = 1/(1 + x^2)$ عند النقاط المتساوية التباعد[17] في الفترة $[-5, 5]$:

$$x_j = -5 + 10j/n \qquad (j = 0, 1, \ldots, n). \tag{6}$$

الرسم التالي يظهر الخطأ $f(x) - p(x)$ بين الدالة الأصلية f والدالة المكملة[18] p.

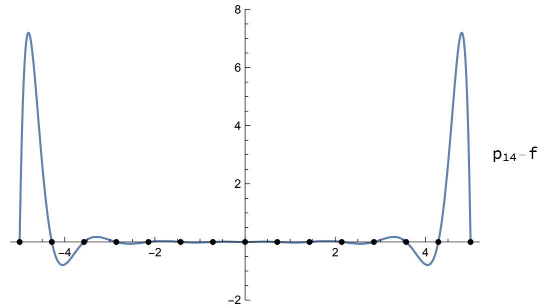
نمو الخطأ عند نهايات الفترة $[-5, 5]$ (يعني عندما $x \to \pm 5$) راجع إلى حاصل الضرب في الطرف الأيمن للمعادلة (3). إذا أضفنا المزيد من النقاط يزيد خطأ الإستكمال نمواً! الحل لهذه المشكلة هو أن نختر نقاط ليست متساوية التباعد، بل نختارها بحيث أن الكثافة تزداد عند نهايات الفترة. الإختيار التالي، المعروف بإسم نقاط شبيشف[19] يحقق هذا الغرض:

$$x_j = 5\cos\frac{(n - j)\pi}{n} \qquad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{7}$$

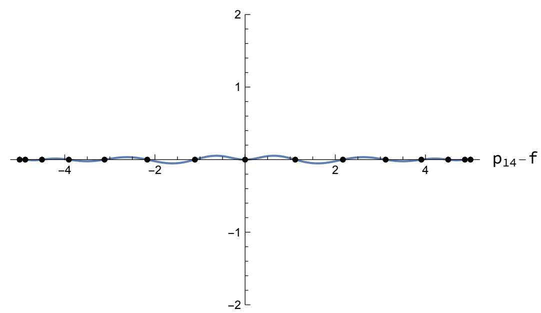
الرسم التالي يبين لنا أن خطأ الإستكمال بهذه النقاط أصغر بكثير من الخطأ الناتج عن الإستكمال عند النقاط المتساوية التباعد.

---

[15] Rolle's theorem
[16] Runge's example
[17] equally spaced
[18] interpolant
[19] Chebyshev points



شكل 1: الخطأ الناتج عن استكمال الدالة $f(x)=1/(1+x^2)$ عند النقاط (6) مع $n=14$.



شكل 2: الخطأ الناتج عن استكمال الدالة $f(x)=1/(1+x^2)$ عند نقاط شبيشف (7) مع $n=14$.

من الممكن برهنة أن نقاط شبيشف تحقق القيمة الدنيا للدالة

$$V(\{y_0,\ldots,y_n\})=\max_{x\in[-5,5]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-y_j)\right|$$

من بين كل الإختيارات لنقاط مختلفة $y_0,\ldots,y_n$ في $[-5,5]$.