2 الفروق المقسومة[1]

إذا أُعطيت دالة $f \in C[a,b]$ ونقاط مختلفة $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ ، لتكن p حدودية الإستكمال من الدرجة n للدالة f عند النقاط $x_0, \ldots, x_n$. معاملة x^n للحدودية p تُسمى الفرق المقسوم للدالة f عند النقاط $x_0, \ldots, x_n$ وتُرمز إليها بالرمز التالي: $f[x_0, \ldots, x_n]$. صيغة لاجرانج للحدودية p تفيد بأن

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}} \frac{1}{x_k - x_\ell}. \qquad (1)$$

من السهل حساب الفروق المقسومة الأولى:

$$f[x_0] = f(x_0), \qquad f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}.$$

النظرية التالية تُبين لنا طريقة إستنتاجية[2] لحساب الفروق المقسومة من درجة معينة، وتوضح لنا سبب تسمية هذه القيمة بالفروق المقسومة.

نظرية 2.1 - لتكن $x_0, \ldots, x_{n+1}$ نقاط مختلفة. إذن

$$f[x_0, \ldots, x_{n+1}] = \frac{f[x_1, \ldots, x_{n+1}] - f[x_0, \ldots, x_n]}{x_{n+1} - x_0}. \qquad (2)$$

لاحظ أن الفروق المقسومة في الطرف الأيمن من المعادلة أعلاه من الدرجة n، على عكس الطرف الأيسر حيث الفرق المقسوم $f[x_0, \ldots, x_{n+1}]$ من الدرجة $n+1$.

برهان. لتكن p الحدودية الإستكمالية للدالة f عند النقاط $x_0, \ldots, x_n$ ولتكن q الحدودية الإستكمالية عند النقاط $x_1, \ldots, x_{n+1}$. الحدودية الإستكمالية للدالة f عند النقاط $x_0, \ldots, x_{n+1}$ تأخذ الشكل تالي:

$$r(x) = \frac{(x - x_0)q(x) + (x_{n+1} - x)p(x)}{x_{n+1} - x_0}.$$

بالفعل، r حدودية من الدرجة $n+1$ ومن السهل التأكد أن $r(x_i) = f(x_i)$ لكل $i = 0, \ldots, n+1$.

[1] Divided differences
[2] recursive

بما أن معاملة x^n لالحدوديتين p و q هما $f[x_0,\ldots,x_n]$ و $f[x_1,\ldots,x_{n+1}]$ ، نرى أن معاملة x^{n+1} لالحدودية r يساوي

$$\frac{f[x_1,\ldots,x_{n+1}]-f[x_0,\ldots,x_n]}{x_{n+1}-x_0}.$$

إذن، بما أن r هي الحدودية الإستكمالية للدالة f عند النقاط $x_0,\ldots,x_{n+1}$ هذا ينهي برهان المعادلة (2). □

المعادلة الإستنتاجية (2) توحي بأن الفروق المقسومة تتيح تقريب قيم مشتقات الدالة f. النظرية التالية تتناول هذه المسألة:

نظرية 2.2 - إذا كانت f دالة في الفضاء $C^n[a,b]$ وإذا كانت $x_0,\ldots,x_n$ نقاط مختلفة في الفترة $[a,b]$ إذن وُجد $\xi\in(a,b)$ بحيث $f[x_0,\ldots,x_n]=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)$.

برهان. لتكن $p\in P_n[x]$ الحدودية الإستكمالية للدالة f عند النقاط $x_0,\ldots,x_n$. الدالة $f-p$ تتلاشى $n+1$ مرة في الفترة $[a,b]$. إذا طبقنا مبرهنة رول n مرة، نرى أن المشتقة من الرتبة n للدالة $f-p$ تتلاشى على الأقل عند نقطة واحدة $\xi\in(a,b)$ أي أن

$$f^{(n)}(\xi)-p^{(n)}(\xi)=0. \tag{3}$$

بما أن p حدودية من الدرجة n، لاحظ أن المشتقة $p^{(n)}$ تساوي حاصل ضرب معاملة x^n للحدودية p بالعدد $n!$. أي، وبما أن p هي حدودية إستكمال للدالة f نرى أن

$$p^{(n)}(\xi)=n!f[x_0,\ldots,x_n].$$

إذن يتبين لنا من المعادلتين السابقتين أن $f[x_0,\ldots,x_n]=f^{(n)}(\xi)/n!$. □

2.1 صيغة نيوتن

تناولنا في المحاضرة السابقة صيغة لاجرانج لحدودية الإستكمال لدالة f. في هذه الفقرة نبرهن صيغة جديدة لنفس الحدودية، وهي صيغة نيوتن.

نظرية 2.3 - لنفرض أن $x_0,\ldots,x_n$ نقاط مختلفة من فئة الأعداد الحقيقية، وأن f دالة. إذن الحدودية

$$p_n(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,\ldots,x_n]\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i) \tag{4}$$

من الدرجة n تساوي f عند كل نقطة x_i، أي $p(x_i)=f(x_i)$ لكل $i=0,\ldots,n$.

برهان. البرهان بالاستنتاج (الاستقراء) الرياضي[3] على العدد الطبيعي n. من الواضح أن العبارة صحيحة عندما $n = 0$. الآن نفرض أن العبارة صحيحة عند الرتبة n ، ونبرهن أنها صحيحة عند الرتبة $n+1$. إذن لتكن p_n حدودية الإستكمال عند $x_0, \ldots, x_n$ و p_{n+1} حدودية الإستكمال عند $x_0, \ldots, x_{n+1}$. لاحظ أن $p_{n+1} - p_n$ تتلاشى عند النقاط $x_0, \ldots, x_n$. بما أن $p_{n+1} - p_n$ من الدرجة n إذن وُجد عدد ثابت c بحيث $p_{n+1} - p_n = c\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ ؛ لاحظ أن c هو المعامل الرئيسي[4] للحدودية $p_{n+1} - p_n$. بما أن المعامل الرئيسي للحدودية $p_{n+1} - p_n$ يساوي المعامل الرئيسي للحدودية p_{n+1} وأن الأخير يساوي $f[x_0, \ldots, x_{n+1}]$ إذن نرى أن $c = f[x_0, \ldots, x_{n+1}]$. بإستخدام فرضية الإستنتاج[5] عند الرتبة n يتبين أن

$$p_{n+1} = p_n + f[x_0, \ldots, x_{n+1}]\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = \sum_{i=0}^{n+1} f[x_0, \ldots, x_i]\prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$$

وهذه هي المعادلة المطلوبة عند الرتبة $n+1$. هذا ينتج أن المعادلة صحيحة لجميع قيم n. □

حساب الفروق المقسومة وتعقيد صيغة نيوتن يمكن أن نرتب الفروق المقسومة على شكل جدول كالآتي:

$$\begin{array}{ccccccc}
f[x_0] & \searrow & & & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & \searrow & & & \\
f[x_1] & \nearrow\searrow & & & f[x_0, x_1, x_2] & \searrow & \\
 & & f[x_1, x_2] & \nearrow\searrow & & & \ddots \\
f[x_2] & \nearrow\searrow & & & & & \\
 & & & & & & f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \\
\vdots & & & & & & \\
 & & & & & \nearrow & \cdots \\
 & & & & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & & \\
 & & f[x_{n-1}, x_n] & \nearrow & & & \\
f[x_n] & \nearrow & & & & &
\end{array}$$

المعادلة الإستنتاجية (2) تتيح لنا حساب كل القيم في هذا الجدول، $\{f[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_l]\}_{0 \le j < l \le n}$ بترتيب عمودي، في $O(n^2)$ عملية حسابية.[6] بحساب هذه القيم يمكن حساب قيمة الحدودية p_n

mathematical induction[3]
leading coefficient[4]
induction hypothesis[5]
arithmetic operation[6]

عند أي نقطة x في $O(n)$ عملية حسابية، بإستخدام طريقة هورنر[7] ، إذا لاحظنا أن:

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)\bigg(f[x_0, x_1] + (x - x_1)\Big(f[x_0, x_1, x_2] + \dots\Big)\bigg).$$

[7] Horner method