3 الحدوديات المتعامدة[1]

ليكن V فضاء متجهي فوق حقل[2] الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. يقال لدالة $\langle \cdot, \cdot \rangle$ من حاصل الضرب الديكارتي[3] $V \times V$ إلى الأعداد الصحيحة $\mathbb{R}$ إنها حاصل ضرب داخلي[4] للفضاء V إذا كانت تحقق الشروط التالية :

- التماثل:[5] $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ لكل $x, y \in V$.
- الموجبية:[6] $\langle x, x \rangle \geq 0$ لكل $x \in V$ و $\langle x, x \rangle = 0$ إذا، وفقط إذا، $x = 0$.
- الخطية:[7] $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$ لكل $x, y, z \in V$ و $a, b \in \mathbb{R}$.

يقال لمتجهين x و y إنهما متعامدين[8] عندما $\langle x, y \rangle = 0$.

أمثلة:

- الفضاء الإقليدي: $V = \mathbb{R}^n$ حيث $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
- فضاء الدوال المتصلة في الفترة $[a, b]$: إذا كانت $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ دالة موجبة، يمكن أن نعرف حاصل ضرب داخلي على $C[a, b]$ بالمعادلة التالية:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx. \qquad (1)$$

3.1 الحدوديات المتعامدة: تعريف، وجود، ووحدانية

إذا أُعطي حاصل ضرب داخلي لفضاء الحدوديات $V = P[x]$، يقال لمتتابعة $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إنها حدوديات متعامدة إذا حققت:

1. $\langle p_n, p_m \rangle = 0$ لكل $n \neq m$
2. $\deg(p_n) = n$ لكل $n \in \mathbb{N}$

[1] Orthogonal polynomials
[2] field
[3] Cartesian product
[4] inner product
[5] Symmetry
[6] Positivity
[7] Linearity
[8] orthogonal

لو كان المعامل الرئيسي للحدودية p_n يساوى الواحد الصحيح يقال عنها أنها صحيحة.[9] لاحظ أن من الشرطين الأولين نرى أن $(p_0, \dots, p_n)$ أساس[10] للفضاء $P_n[x]$ لكل $n \in \mathbb{N}$. النظرية التالية تنص على وجود حدوديات متعامدة لكل حاصل ضرب داخلي.

نظرية 3.1 - لكل حاصل ضرب داخلي لفضاء الحدوديات وُجدت متتابعة وحيدة $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من الحدوديات المتعامدة الصحيحة.

برهان. البرهان بالإستنتاج الرياضي. ليكن $p_0 = 1$ ولنفرض أن $(p_0, \dots, p_n)$ حدوديات صحيحة تحقق $\langle p_i, p_j \rangle = 0$ لكل $0 \le i \ne j \le n$ و $\deg(p_i) = i$. نعرف p_{n+1} بالمعادلة التالية:

$$p_{n+1} = x^{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \frac{\langle x^{n+1}, p_j \rangle}{\langle p_j, p_j \rangle} p_j. \tag{2}$$

(لاحظ التشابه مع عملية "جرام-شميدت"[11] في الجبر الخطي ؛ الحد الأخير في هذه المعادلة ليس إلا الإسقاط العمودي للمتجه x^{n+1} على الفراغ الجزئي $P_n[x]$). نرى أن p_{n+1} حدودية صحيحة من الدرجة $n+1$ وأن

$$\langle p_{n+1}, p_k \rangle = \langle x^{n+1}, p_k \rangle - \langle x^{n+1}, p_k \rangle = 0$$

لكل $k = 0, \dots, n$. لا يبقى لنا إلا أن نبرهن وحدانية الحدودية p_{n+1}. لنفرض أن $\tilde{p}_{n+1}$ حدودية أخرى صحيحة تحقق

$$\begin{cases} \deg(\tilde{p}_{n+1}) = n+1 \\ \langle \tilde{p}_{n+1}, p_k \rangle = 0 \quad \forall k = 0, \dots, n. \end{cases}$$

بما أن p_{n+1} و $\tilde{p}_{n+1}$ حدوديتان صحيحتان من الدرجة $n+1$، من الواضح أن درجة الفارق $p_{n+1} - \tilde{p}_{n+1}$ يكون أقل من أو يساوي n. أيضاً نلاحظ أن

$$\langle p_{n+1} - \tilde{p}_{n+1}, p_k \rangle = 0$$

لكل $k = 0, \dots, n$. إذن $p_{n+1} - \tilde{p}_{n+1} \in P_n[x]$ عمودية على كل عنصر من الأساس $(p_k)_{k=0,\dots,n}$ للفضاء $P_n[x]$. إذن من الضروري أن $p_{n+1} - \tilde{p}_{n+1} = 0$ أي $p_{n+1} = \tilde{p}_{n+1}$. □

مثال: ليكن حاصل الضرب الداخلي

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) dx$$

---

[9] monic polynomial

[10] basis

[11] Gram-Schmidt

على الفضاء $P[x]$. الحدوديات المتعامدة لهاذا الحاصل الضرب الداخلي تسمى "حدوديات ليجاندر"[12]:

$$p_0(x) = 1$$
$$p_1(x) = x$$
$$p_2(x) = x^2 - (1/3)$$
$$p_3(x) = x^3 - (3/5)x$$
$$p_4(x) = x^4 - (30/35)x^2 + (3/35).$$

نعرض في الجدول التالي بعض العائلات المعروفة من الحدوديات المتعامدة. دالة الوزن تشير إلى الدالة $w(x)$ في تعريف حاصل الضرب الداخلي (1).

الأسم	الرمز	الفترة $[a, b]$	دالة الوزن
ليجاندر (Legendre)	P_n	$[-1, 1]$	$w(x) \equiv 1$
شيبيشيف (Chebyshev)	T_n	$[-1, 1]$	$w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$
لاجير (Laguerre)	L_n	$[0, \infty)$	$w(x) = e^{-x}$
آرميت (Hermite)	H_n	$(-\infty, \infty)$	$w(x) = e^{-x^2}$

3.2 علاقة التكرار ثلاثية الحد[13]

النظرية التالية تنص على وجود علاقة تكرار بين الحدوديات المتعامدة. تتيح هذه العلاقة حساب الحدوديات المتعامدة بطريقة سهلة، فضلاً عن أهميتها في نظرية الحدوديات المتعامدة بشكل عام.

نظرية 3.2 - لنفرض أن حاصل الضرب الداخلي يحقق:

$$\langle xp, q \rangle = \langle p, xq \rangle$$

لكل $p, q \in P[x]$. في هذه الحالة، الحدوديات المتعامدة الصحيحة p_n تحقق علاقة التكرار التالية:

$$p_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)p_n(x) - \beta_n p_{n-1}(x)$$

بحيث

$$\alpha_n = \frac{\langle p_n, xp_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle}, \qquad \beta_n = \frac{\langle p_n, p_n \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle} > 0$$

و

$$p_{-1} \equiv 0, \qquad p_0 = 1.$$

[12] Legendre polynomials
[13] Three-term recurrence relation

برهان. ليكن $n \geq 0$ ولنعرف

$$\psi(x) = p_{n+1}(x) - \big[(x-\alpha_n)p_n(x) - \beta_n p_{n-1}(x)\big] \ \in P_{n+1}[x]. \tag{3}$$

نريد برهنة $\psi = 0$.

- بما أن p_{n+1} و $xp_n(x)$ حدوديتان صحيحتان من الدرجة $n+1$ من الواضح أن الحد المفرد[14] x^{n+1} في الصيغة (3) محذوف. إذن $\psi \in P_n[x]$. في ما يلي نبرهن أن $\langle \psi, p_\ell \rangle = 0$ لكل $\ell = 0, \ldots, n$. هذا كافٍ لإثبات $\psi = 0$.

- إذا كان $\ell \in \{0, \ldots, n-2\}$ فإذن

$$\begin{cases} \langle p_{n+1}, p_\ell \rangle = 0 \\ \langle p_n, p_\ell \rangle = 0 \\ \langle xp_n, p_\ell \rangle = \langle p_n, xp_\ell \rangle = 0 \\ \langle p_{n-1}, p_\ell \rangle = 0 \end{cases}$$

بما أن $(p_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ حدوديات متعامدة. إذن

$$\langle \psi, p_\ell \rangle = \langle p_{n+1}, p_\ell \rangle - \langle xp_n, p_\ell \rangle + \alpha_n \langle p_n, p_\ell \rangle + \beta_n \langle p_{n-1}, p_\ell \rangle = 0$$

لكل $\ell \in \{0, \ldots, n-2\}$.

- لاحظ أن

$$\begin{aligned} \langle \psi, p_{n-1} \rangle &= -\langle xp_n, p_{n-1} \rangle + \beta_n \langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle \\ &= -\langle p_n, xp_{n-1} \rangle + \beta_n \langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle. \end{aligned}$$

بما أن xp_{n-1} حدودية صحيحة من الدرجة n وكذلك للحدودية p_n، إذن لدينا $xp_{n-1} = p_n + r$ حيث $r = xp_{n-1} - p_n$ من الدرجة $n-1$ أو أقل. إذن

$$\begin{aligned} \langle \psi, p_{n-1} \rangle &= -\langle p_n, p_n + r \rangle + \beta_n \langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle \\ &= -\langle p_n, p_n \rangle + \beta_n \langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle = 0 \end{aligned}$$

حيث إستخدمنا أن $\langle p_n, r \rangle = 0$ وأن $\beta_n = \frac{\langle p_n, p_n \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}$.

- فقط يبقي إثبات أن $\langle \psi, p_n \rangle = 0$. لدينا

$$\langle \psi, p_n \rangle = -\langle (x-\alpha_n)p_n, p_n \rangle = -\langle xp_n, p_n \rangle + \alpha_n \langle p_n, p_n \rangle = 0$$

بما أن $\alpha_n = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle}$.

إذن أثبتنا أن $\langle \psi, p_\ell \rangle = 0$ لكل $\ell = 0, \ldots, n$. بما أن $(p_\ell)_{\ell=0,\ldots,n}$ أساس لفضاء $P_n[x]$ وأن ψ عنصر من هذا الفضاء إذن يتبين أن $\psi = 0$. $\square$

---

[14] monomial