4 التوفيق الحدودي بطريقة المربعات الصغرى[1]

لتكن $(p_0, p_1, \dots)$ حدوديات متعامدة لحاصل الضرب الداخلي

$$\langle g, h\rangle = \int_a^b w(x)g(x)h(x)dx$$

حيث $w(x)$ دالة وزن موجبة. لتكن $f \in C[a,b]$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$. الحدودية التي تحقق القيمة الصغرى للصيغة

$$\|f-p\|^2 = \langle f-p, f-p\rangle$$

من بين الحدوديات من الدرجة n هي

$$\hat{p}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, p_k\rangle}{\langle p_k, p_k\rangle} p_k(x).$$

برهان. بما أن المجموعة $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ أساساً للفضاء $P_n[x]$ إذن وُجدَ لأي $p \in P_n[x]$ معاملات $c_0, c_1, \dots, c_n$ بحيث $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k p_k(x)$. إذن، بما أن الحدوديات $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ متعامدة فإن

$$\begin{aligned}\langle f-p, f-p\rangle &= \left\langle f - \sum_{k=0}^{n} c_k p_k, f - \sum_{k=0}^{n} c_k p_k \right\rangle \\ &= \langle f, f\rangle - 2\sum_{k=0}^{n} c_k \langle f, p_k\rangle + \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \langle p_k, p_k\rangle .\end{aligned} \tag{1}$$

لتحقيق القيمة الصغرى لهذه الصيغة ، نبحث عن معاملات (c_k) بحيث يتلاشى التفاضل الجزئي [2] بالنسبة للمتغيرات (c_k). التفاضل الجزئي للصيغة (1) يساوي

$$\frac{\partial}{\partial c_k} \langle f-p, f-p\rangle = -2\langle p_k, f\rangle + 2c_k \langle p_k, p_k\rangle .$$

إذن نرى أن

$$c_k = \frac{\langle f, p_k\rangle}{\langle p_k, p_k\rangle}$$

يجعل هذا التفاضل صفراً. □

[1] Polynomial fitting using the method of least-squares
[2] partial derivative

الخطأ الناجم عن تقريب الدالة f بالحدودية $\hat{p}_n$ يساوي

$$\|f-\hat{p}_n\|^2 = \langle f,f\rangle - \sum_{k=0}^{n}[2c_k\langle p_k,f\rangle - c_k^2\langle p_k,p_k\rangle] = \langle f,f\rangle - \sum_{k=0}^{n}\frac{\langle p_k,f\rangle^2}{\langle p_k,p_k\rangle}.$$

أي إن

$$\|f-\hat{p}_n\|^2 + \|\hat{p}_n\|^2 = \langle f,f\rangle .$$

لاحظ أن هذه المعادلة ليست إلّا متطابقة فيثاغورس[3] في الفضاء $C[a,b]$ المزود بحاصل الضرب الداخلي $\langle\cdot,\cdot\rangle$. من الواضح أن خطأ التقريب $\|f-\hat{p}_n\|^2$ ينقص مع زيادة الدرجة n. السؤال الآن هو: هل الخطأ $\|f-\hat{p}_n\|^2$ يؤول إلى صفر[4] عندما تؤول n إلى ما لا نهاية؟ الجواب نعم وهذه نتيجة من نظرية (Weierstrass) التالية:

نظرية 4.1 (Weierstrass) - لتكن $f \in C[a,b]$ دالة متصلة في الفترة $[a,b]$. لكل $\epsilon > 0$ وُجدت حدودية p من درجة عالية إلى حد كاف[5] بحيث $|f(x)-p(x)| < \epsilon$ لكل $x \in [a,b]$.

لإثبات أن $\|f-\hat{p}_n\|^2 \to 0$ لاحظ أن

$$\|f-p\|^2 = \int_a^b w(x)(f(x)-p(x))^2dx \le \left(\max_{x\in[a,b]}|f(x)-p(x)|\right)^2\int_a^b w(x)dx.$$

نستنتج من نظرية (Weierstrass) أن لكل $\delta > 0$ وُجدت حدودية p من الدرجة n بحيث

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-p(x)| \le \sqrt{\delta/\int_a^b w(x)dx}.$$

إذن لكل $N > n$ الخطأ $\|f-\hat{p}_N\|^2$ يحقق

$$\|f-\hat{p}_N\|^2 \le \|f-p\|^2 \le \left(\sqrt{\frac{\delta}{\int_a^b w(x)dx}}\right)^2\int_a^b w(x)dx = \delta.$$

بما أن δ أي رقم متناهي الصغر، هذا يثبت أن $\|f-\hat{p}_n\| \to 0$ عندما $n \to \infty$.

---

[3] Pythagoras identity
[4] converges to zero
[5] high enough degree