5 التربيع الغاوسي[1]

المسألة التي سنتناولها في هذه المحاضرة هي الآتية: لتكن دالة $f \in C[a,b]$. نريد أن نحسب التكامل $\int_a^b f(x)dx$ أو بشكل أعم، التكامل $\int_a^b w(x)f(x)dx$ حيث w دالة وزن موجبة.[2] الهدف هو تقريب التكامل بمجموع محدود على صورة

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{\nu} b_k f(c_k). \tag{1}$$

هذه المعادلة تُسمى معادلة تربيع . الأعداد b_k تُسمى الأوزان[3] والأعداد c_k تُسمى العُقد[4] و يتم اختيار هذه الأعداد بحيث المعادلة (1) تكون صحيحة للحدوديات من درجة عالية m. سوف نرى أن أعلى قيمة ممكنة هي $m = 2\nu - 1$.

لنثبت أولاً أنه لا يمكن أن تكون المعادلة (1) صحيحة لكل الحدوديات من الدرجة 2ν. لاحظ أن الحدودية

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\nu} (x - c_k)^2$$

من الدرجة 2ν وأن $\int_a^b w(x)f(x)dx > 0$ ولكن $\sum_{k=1}^{\nu} b_k f(c_k) = 0$.

لنبرهن الآن أنه من الممكن إختيار الأوزان b_k والعُقد c_k بحيث المعادلة (1) تكون صحيحة للحدوديات من الدرجة $2\nu - 1$. لتكن $p_0, p_1, \ldots$ الحدوديات المتعامدة للجداء الداخلي $\langle f, g\rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx$ على $P[x]$.

تمهيدية 5.1 - لكل عدد طبيعي $n > 0$، الحدودية المتعامدة p_n من الدرجة n تتلاشى تحديداً عند n نقطة مختلفة حقيقية في الفترة (a, b).

برهان. لتكن $\xi_1, \ldots, \xi_m$ نقاط تَغَيُّر إشارة الحدودية p_n. لاحظ أن $\xi_1, \ldots, \xi_m$ هي أيضا جذور p_n فردية التعدد[5]. لتكن أيضا $q(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - \xi_i)$. لاحظ أن إشارة الحدودية $p_n(x)q(x)$ ثابتة في الفترة (a, b)، ذلك لأن جذور الحدودية $p_n(x)q(x)$ جميعها زوجية التعدد. إذن هذا يدل على أن

$$|\langle q, p_n\rangle| = \left|\int_a^b w(x)q(x)p_n(x)dx\right| = \int_a^b w(x)|q(x)p_n(x)|dx > 0.$$

[1] Gaussian quadrature
[2] positive
[3] weights
[4] nodes
[5] odd multiplicity

بما أن p_n عمودية على جميع الحدوديات من الدرجة $n-1$ أو أقل، إذن من الضروري أن تكون درجة الحدودية q هي n أو أكثر. من ناحية أخرى، بما أن عدد جذور الحدودية p_n لا يتجاوز n, درجة الحدودية q أيضا لا يتجاوز n. إذن هذا يعني أن درجة q تساوي n، أي أن لالحدودية p_n تحديداً n جذر مختلف في الفترة (a,b). $\square$

نظرية 5.1 (تربيع غاوسي) - (أ) لتكن $c_1,\ldots,c_\nu$ نقاط مختلفة في (a,b). بإختيار الأوزان (b_k) وفق المعادلة

$$b_k = \int_a^b w(x) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\nu} \frac{x-c_j}{c_k-c_j} dx, \tag{2}$$

تكون معادلة التربيع

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{\nu} b_k f(c_k) \tag{3}$$

صحيحة لكل حدودية f من الدرجة $\nu-1$.

(ب) بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت النقاط (c_k) هي جذور الحدودية المتعامدة p_ν، تكون معادلة التربيع (3) صحيحة لكل حدودية من الدرجة $2\nu-1$. في هذه الحالة تسمى معادلة التربيع تربيع غاوسي.

برهان. أي كثيرة حدود من الدرجة $\nu-1$ مُعرّفة تماماً بمعرفة قيَمها عند ν نقطة مختلفة، وصيغة لاجرانج تنص أن

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\nu} f(c_k) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\nu} \frac{x-c_j}{c_k-c_j}.$$

إذن بإتخاذ الأوزان (b_k) من المعادلة (2) نرى أن

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{\nu} b_k f(c_k)$$

كما هو مطلوب.

لنثبت الآن الجزء الثاني من النظرية. لنفرض أن c_k هي الجذور لالحدودية p_ν المتعامدة على $P_{\nu-1}[x]$. إذا كانت f حدودية من الدرجة $2\nu-1$ القِسمة الإقليدية[6] تنص على وجود حدوديات

[6] Euclidean division

q و r من الدرجة $\nu - 1$ بحيث $f = qp_\nu + r$. إذن

$$\begin{aligned}\int_a^b w(x)f(x)dx &= \int_a^b w(x)[q(x)p_\nu(x) + r(x)]dx \\ &= \langle q, p_\nu \rangle + \int_a^b w(x)r(x)dx = \int_a^b w(x)r(x)dx\end{aligned}$$

بما أن $\langle q, p_\nu \rangle = 0$.

بما أن r من الدرجة $\nu - 1$ أو أقل، وبناء على الجزء الأول من هذه النظرية، نرى أن

$$\int_a^b w(x)r(x)dx = \sum_{k=1}^{\nu} b_k r(c_k).$$

أخيراً لاحظ

$$\sum_{k=1}^{\nu} b_k r(c_k) = \sum_{k=1}^{\nu} b_k [f(c_k) - q(c_k)p_\nu(c_k)] = \sum_{k=1}^{\nu} b_k f(c_k),$$

بما أن (c_k) جذور p_ν. إذن أثبتنا أن

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{\nu} b_k f(c_k)$$

لكل حدودية f من الدرجة $2\nu - 1$. $\square$