ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 1997, т. 219, с. 420–452

УДК 517.518

О проблеме де Бора для многомерных D^m-сплайнов[1]

©1997 г. А.Ю. Шадрин

Поступило в июне 1997 г.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Одним из путей определения многомерных сплайнов является вариационный подход, ведущий к D^m-сплайнам Аттьи:

$$s = s(f, m, \Delta, \Omega) = \arg\ \min \{ \|D^m g\|_2 : \ g \in W_2^m(\Omega),\ g|_\Delta = f|_\Delta \} . \tag{1.1}$$

Здесь $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область с гладкой границей, Δ — некоторое замкнутое подмножество Ω,

$$\|D^l g\|_p = \begin{cases} \left\{ \int\limits_\Omega \left(\sum\limits_{|\alpha|=l} \dfrac{l!}{\alpha!} |D^\alpha g|^2 \right)^{p/2} dx \right\}^{1/p}, & 1 \le p < \infty; \\ \max\limits_{|\alpha|=l} \|D^\alpha g\|_{L_\infty(\Omega)}, & p = \infty. \end{cases}$$

При $n = 1$ D^m-сплайны являются обычными кусочно полиномиальными функциями степени $2m-1$. При $n > 1$ D^m-сплайны полигармоничны в области $\Omega \setminus \Delta$ с порядком m, т.е. $\nabla^{2m} s \equiv 0$, где ∇^2 — оператор Лапласа.

D^m-сплайны наследуют ряд важных свойств одномерных сплайнов степени $2m-1$. В частности, обозначим через

$$\overline{h}_\nu = \sup_{x\in\Omega} \inf_{y\in\Delta} |x-y|, \quad \underline{h}_\nu = \inf_{y,z\in\Delta} |y-z|$$

максимальный и минимальный шаг сетки $\Delta = \Delta_\nu$. Тогда условие $f \in W_2^m(\Omega)$ обеспечивает сходимость

$$\|f - s_\nu(f)\|_{W_2^m(\Omega)} \to 0\,, \quad \overline{h}_\nu \to 0$$

вне зависимости от способа сгущения сеток Δ_ν, в частности независимо от ограниченности величины

$$M_\nu = \overline{h}_\nu / \underline{h}_\nu .$$

Сходимость такого рода мы будем называть *безусловной сходимостью* сплайн-интерполянтов.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Гумбольдта (ФРГ) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-00949а).

В пространствах Соболева $W_p^l(\Omega)$, отличных от $W_2^m(\Omega)$, сходимость D^m-сплайнов может быть обеспечена на квазиравномерных сетках Δ_ν, т.е. при условии

$$M_\nu < M, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

но в отсутствие каких-либо ограничений примеры расходимости интерполяционного процесса в некоторых $W_p^l(\Omega)$ уже существуют (детали см. ниже).

Определение 1. Будем говорить, что при данных l, p, m, n, Ω в пространстве $W_p^l(\Omega)$ имеет место безусловная сходимость (б. сх.) D^m-сплайнов, и писать

$$s_\nu(f) \to f \quad \text{безусл. в } W_p^l(\Omega),$$

если для любой функции $f \in W_p^l(\Omega)$, любой последовательности дискретных сеток Δ_ν и любого компакта $B \subset \Omega$ имеет место сходимость

$$\|f - s_\nu(f)\|_{W_p^l(B)} \to 0\,, \quad \overline{h}_\nu \to 0.$$

В настоящей работе изучается следующая

Задача. При данных m, n, Ω найти необходимые и достаточные условия на $l \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, \infty]$, при которых

$$s_\nu(f) \to f \quad \text{безусл. в } W_p^l(\Omega),$$

Постановка этой задачи принадлежит Ю.Н. Субботину. Ее происхождение связано с известной гипотезой К. де Бора [1] для одномерных сплайнов: *для любой функции $f \in C^m[a, b]$ и любой дискретной сетки $\Delta_\nu \subset [a, b]$ верна оценка*

$$\|s_\nu^{(m)}(f)\|_\infty \le c_m \|f^{(m)}\|_\infty$$

с константой c_m, не зависящей от Δ_ν.

2. КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СЕТОК

Для корректности задачи необходимо следующее:

(A) существование и единственность D^m-сплайна $s_\nu(f)$, определяемого в (1.1) по значениям функции $f \in W_p^l(\Omega)$ на Δ_ν;

(B) включение $s_\nu(f) \in W_p^l(\Omega, \mathrm{loc})$.

Наши рассмотрения относятся к случаю дискретных сеток

$$\Delta_\nu = \{t_{i\nu}\}_{i=1}^{N_\nu}, \quad \underline{h}_\nu > 0.$$

В этом случае условия (A), (B) будут выполнены при следующих допущениях:

(a) $m > n/2$, $l > n/p$;

(b) $l - n/p < 2m - n$.

Действительно, условие (a) влечет вложения

$$W_2^m(\Omega) \to C(\Omega), \quad W_p^l(\Omega) \to C(\Omega),$$

что дает (A).

Условие же (b) обеспечивает включение $G \in W_p^l(R^n, \mathrm{loc})$ для функции

$$G(x) = \begin{cases} |x|^{2m-n}, & n = 2n_1; \\ |x|^{2m-n} \ln |x|, & n = 2n_1 + 1, \end{cases}$$

являющейся фундаментальным решением полигармонического уравнения $\nabla^{2m} u = g$. Это равносильно условию (B) в силу того факта [6], что D^m-сплайн на дискретной сетке $\Delta = \{t_i\}_{i=1}^N$ может быть представлен как

$$s(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i G(x - t_i) + F(x)$$

с функцией $F(x) = F(x; m, \Delta, \Omega)$, полигармонической и, следовательно, аналитической в области Ω.

Как легко заметить, условия (a), (b) объединяются в одно

$$0 < l - n/p < 2m - n,$$

которое мы и будем предполагать далее выполненным, лишь иногда о нем напоминая.

3. ИСТОРИЯ ВОПРОСА

3.1. Одномерный случай. Первый пример расходимости интерполяционного процесса принадлежит С. Норду [9], а именно пример расходимости кубических сплайнов ($m = 2$) в $C[a, b]$. Из дальнейших работ отметим достаточно общие результаты [5, 2]. Простой способ построения подобных примеров был предложен в [7]. Имеющиеся результаты можно объединить в следующее утверждение.

Теорема А1 (необходимое условие б. сх.). *Пусть*

$$s_\nu(f) \to f \quad \textit{безусл. в} \ W_p^l[a, b].$$

Тогда выполнено одно из следующих условий:

$$\begin{array}{llll} 1) & l = m, & p \in [1, \infty], & n = 1; \\ 2) & l = m + 1, & p = 1, & n = 1; \\ 3) & l = m - 1, & p = \infty, & n = 1. \end{array}$$

Гипотеза де Бора [1, 2] состоит в утверждении, что при $n = 1$ *условия* 1)–3) *теоремы* А1 *необходимы и достаточны для безусловной сходимости сплайнов в* $W_p^l[a, b]$.

Частичное подтверждение этой гипотезе дает

Теорема A2 (достаточное условие б. сх.). *Пусть выполнено одно из условий:*

$$
\begin{array}{llllll}
1a) & l=m, & p\in[1,\infty], & m=2,3, & n=1; \\
1b) & l=m, & p\in(2-\epsilon_m, 2+\epsilon'_m) & m\geq 4, & n=1; \\
2) & l=m+1, & p=1, & m=2, & n=1; \\
3) & l=m-1, & p=\infty, & m=2, & n=1.
\end{array}
$$

Тогда

$$s_\nu(f)\to f \quad \textit{безусл. в} \;\; W_p^l[a,b].$$

Достаточность условий 1a), 2), 3), относящихся к малым значениям m, была показана в [11, 3, 4]. Условие 1b), обеспечивающее б. сх. сплайнов в $W_p^m[a,b]$ для любых m, если только p достаточно близко к 2, есть наш не столь давний результат [10].

3.2. Многомерный случай. Для $n>1$ вопросы аппроксимации функции $f\in W_p^l(\Omega)$ посредством интерполяционных D^m-сплайнов рассматривались О.В. Матвеевым [7,8]. В отношении проблемы де Бора им получены следующие результаты.

Лемма B [8]. *Пусть $n\geq 1$, $m>n/2$, $I^n=(-1,1)^n$ — n-мерный куб,*

$$\mathcal{A}_n^m := \left\{(l,p):\; s_\nu(m,f)\to f \quad \textit{безусл. в} \;\; W_p^l(I^n)\right\}.$$

Тогда

$$\mathcal{A}_1^m \supseteq \mathcal{A}_2^m \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{A}_n^m \supseteq \ldots$$

Другими словами, с ростом размерности множество соболевских пространств $W_p^l(\Omega)$, допускающих б. сх. D^m-сплайнов, по меньшей мере не рассматривается. В частности, необходимые условия, данные в теореме A1 для $n=1$, автоматически переносятся на пространства размерности $n>1$.

О.В. Матвеев анонсировал также результат [7], показывающий, что на самом деле с ростом размерности n множество пространств $W_p^l(\Omega)$, допускающих б. сх. D^m-сплайнов, сужается.

Теорема C1 (необходимое условие б. сх.). *Пусть*

$$s_\nu(f)\to f \quad \textit{безусл. в} \;\; W_p^l(\Omega)$$

Тогда выполнено одно из следующих условий:

$$
\begin{array}{lllll}
1a) & l=m, & p\in[1,\infty), & n=2; \\
1b) & l=m, & p\in\left[2-[\frac{n+1}{2}]^{-1}, 2+[\frac{n-1}{2}]^{-1}\right], & n\geq 3; \\
2) & l=m+1, & p=1, & n=2,3,4; \\
3) & l=m-1, & p=\infty, & n=2,3.
\end{array}
\tag{3.1}
$$

В то же время хорошо известное достаточное условие б. сх. таково.

Теорема C2 (достаточное условие б. сх.).

$$s_\nu(f) \to f \quad \textit{безусл. в} \;\; W_2^m(\Omega)$$

Отсюда видно, что при $n \to \infty$ необходимые условия (3.1) безусловной сходимости $s_\nu(f,m) \to f$ в $W_p^l(\Omega)$ асимптотически близки к достаточному условию

$$l = m, \quad p = 2. \tag{3.2}$$

При этом в отличие от одномерного случая какие-либо другие достаточные условия неизвестны.

В этой работе мы показываем, что этот факт не случаен и что за небольшим исключением условие (3.2) является единственным необходимым и достаточным условием безусловной сходимости $s_\nu(f,m) \to f$ в $W_p^l(\Omega)$.

4. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

4.1. Основной результат. Нами доказана

Теорема 1 (необходимое условие б. сх.). *Пусть* l, m, n, p *удовлетворяют неравенствам* $0 < l - n/p < 2m - n$ *и таковы, что*

$$s_\nu(f) \to f \quad \textit{безусл. в} \;\; W_p^l(I^n)$$

Тогда либо

$$(l,p) = (m,2), \quad n \geq 2, \tag{4.1}$$

либо выполнено одно из следующих условий:

$$\begin{array}{llllll} \text{1a)} & l = m, & p \in [1,2), & m = 2m_1, & n = 2; \\ \text{1b)} & l = m, & p \in [3/2,2), & m = 2m_1, & n = 3; \\ \text{2a)} & l = m+1, & p = 1, & & n = 2,3; \\ \text{2b)} & l = m+1, & p = 1, & m = 2m_1+1, & n = 4; \\ \text{3)} & l = m-1, & p = \infty, & & n = 2,3. \end{array} \tag{4.2}$$

Следствие. *При* $n \geq 5$ *сходимость*

$$s_\nu(f,m) \to f \quad \textit{безусл. в} \;\; W_p^l(I^n)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$(l,p) = (m,2).$$

Ввиду наших результатов следует ожидать, что на самом деле верна

Гипотеза 1. *При $n \geq 2$ сходимость*

$$s_\nu(f,m) \to f \quad \textit{безусл. в} \ W_p^l(I^n)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$(l,p) = (m,2).$$

Для получения такого окончательного результата не хватает контрпримеров лишь в трех случаях для $n = 2$ (см. ниже замечание 4.1).

4.2. Редукция к малой размерности n. Нам нужно показать, что если ни одно из условий (4.1), (4.2) не соблюдено, то найдутся $f \in W_p^l(I^n)$, $B \in I^n$ и последовательность $\{\Delta_\nu\}$, для которых нормы $\|s_\nu(f)\|_{W_p^l(B)}$ будут неограниченно расти.

По теореме Банаха–Штейнгауза и в силу леммы B это будет прямым следствием следующего результата.

Теорема 1$'$. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

$$\begin{array}{llllll}
1a) & l = m, & p \in (2,\infty], & & n = 2; \\
1b) & l = m, & p \in [1,2), & m = 2m_1 + 1, & n = 2; \\
1c) & l = m, & p \in [1,3/2), & m = 2m_1 + 1, & n = 3; \\
1d) & l = m, & p \in [1,2), & m = 2m_1, & n = 4; \\
2a) & l = m+1, & p = 1, & m = 2m_1, & n = 4; \\
2b) & l = m+1, & p = 1, & m = 2m_1 + 1, & n = 5; \\
3) & l = m-1, & p = \infty, & & n = 4.
\end{array} \tag{4.3}$$

Тогда для любых $M, \epsilon, \eta > 0$ найдутся функция $f \in W_p^l(I^n)$ и дискретная сетка Δ_ν такие, что

$$\operatorname{dist}(\Delta_\nu, I^n) < \epsilon, \quad \|f\|_{W_p^l(I^n)} = 1, \quad \|s(f,m,\Delta_\nu,I^n)\|_{W_p^l(\eta I^n)} > M. \tag{4.4}$$

В самом деле, по лемме B теорема 1$'$ будет справедлива для всех n начиная с указанных в (4.3). А из нее по теореме Банаха–Штейнгауза вытекает существование функции $g \in W_p^l(I^n)$ и последовательности сеток Δ_ν таких, что при заданном $\eta > 0$

$$\|s(g,m,\Delta_\nu,I^n)\|_{W_p^l(\eta I^n)} \to \infty, \quad \overline{h}_\nu \to 0.$$

Замечание 4.1. Из (4.3) видно, что для доказательства гипотезы о единственности достаточного условия б. сх. в $W_p^l(I^n)$

$$(l,p) = (m,2), \quad n \geq 2,$$

достаточно построить примеры, аналогичные (4.4), лишь в трех случаях

$$\begin{array}{lllll}
i) & l = m, & p \in [1,2), & m = 2m_1, & n = 2; \\
ii) & l = m+1, & p = 1, & & n = 2; \\
iii) & l = m-1, & p = \infty, & & n = 2.
\end{array}$$

4.3. Построение материала. Все дальнейшее содержание статьи связано с доказательством теоремы $1'$. Случай $l = m, m+1$ разбирается в разд. 5–16, случай $l = m-1$ в разд. 17. При этом в разд. 5, 6 и в начале разд. 17 мы проводим дальнейшие упрощения, сводящие теорему $1'$ к теореме 2 ($l = m, m+1$) и теореме 3 ($l = m-1$).

Теорема 2 ($l = m, m+1$) формулируется в разд. 7 и каждый ее случай доказывается далее в разд. 10–16. Ввиду достаточной сложности контрпримеров для $l = m, m+1$ мы проводим подробные доказательства лишь в случаях 1a), 1b), когда $n = 2$. В остальных случаях ($n = 3$, 4, 5) мы ограничиваемся формулировками утверждений и краткими пояснениями.

Теорема 3, как и все, относящееся к случаю $l = m-1$, содержится в разд. 17. Здесь мы также ограничились кратким изложением.

5. РЕДУКЦИЯ К ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ МНОЖЕСТВЕ

В этом разделе мы показываем возможность дальнейшего упрощения в случаях 1), 2) теоремы $1'$, когда $l = m, m+1$, а именно что в этих случаях существование $f \in W_p^l(I^n)$ и дискретной сетки Δ_ν со свойствами (4.4) следует из существования $f \in W_p^l(I^n) \cap W_2^m(I^n)$ и уже произвольного (не обязательно дискретного) множества Δ с теми же свойствами (4.4).

Лемма 5.1. *Пусть $m > n/2$, $\Delta \subset I^n$ и последовательность дискретных сеток $\{\Delta_i\}$ такова, что*

$$\Delta_i \subset \Delta_{i+1} \subset \Delta, \quad \operatorname{dist}(\Delta_i, \Delta) \to 0.$$

Пусть далее для заданной $f \in W_2^m(I^n)$

$$s_i := s(f, m, \Delta_i, I^n), \quad s := s(f, m, \Delta, I^n).$$

Тогда

$$\|s_i - s\|_{W_2^m(I^n)} \to 0.$$

Доказательство аналогично приведенному в [7, с. 150].

Замечание 5.1. Если выбрать в качестве Δ замыкание некоторой подобласти I^n с достаточно гладкой границей S, то ввиду гладкости $s, f \in W_2^m(I^n)$ интерполяция $s(f)\Big|_\Delta \equiv f\Big|_\Delta$ повлечет интерполяцию краевых значений f, т.е.

$$\frac{\partial^k s(f)}{\partial n_S^k}\Big|_S = \frac{\partial^k f}{\partial n_S^k}\Big|_S, \quad k = 0, \dots, m-1,$$

где n_S — вектор нормали к S.

Рассмотрим теперь вопрос об оценке W_p^l-норм $s_i(f)$ через W_p^l-норму предельного сплайна $s(f, m, \Delta, I^n)$.

Вообще говоря, при недискретном Δ, при любой гладкости f априори можно утверждать лишь, что $s(f) \in W_2^m(I^n)$. Но, поскольку функция $s(f)$ полигармонична и, следовательно, аналитична в $V = (I^n \setminus \Delta)$, имеет место включение $s(f) \in W_p^l(B)$ для любых l, p и любого компакта $B \in V$.

Следующая лемма показывает, что на любом таком компакте W_p^l-нормы дискретных сплайнов s_i также сходятся к $\|s\|_{W_p^l(B)}$.

Лемма 5.2. *Пусть* $m > n/2$, $f \in W_2^m(I^n)$, $\Delta_i, \Delta \subset I^n$,

$$\|s - s_i\|_{W_2^m(I^n)} \to 0.$$

Тогда для любого компакта B *такого, что*

$$B \subset V := I^n \setminus (\{\Delta_i\}_1^\infty \cup \Delta),$$

для любых l, p *имеет место сходимость*

$$\|s - s_i\|_{W_p^l(B)} \to 0.$$

Доказательство. Для функций g, полигармонических в шаре $B(a, 2\epsilon)$, известно неравенство типа Маркова

$$\|g\|_{W_p^l[B(a,\epsilon)]} \le c(\epsilon, l, p)\|g\|_{L_1[B(a,2\epsilon)]}. \tag{5.1}$$

Далее, для любого малого $\epsilon > 0$ найдется покрытие B конечным числом шаров $B(a_j, \epsilon)$ радиуса ϵ, скажем числом $K = K(B, \epsilon)$, такое, что

$$B \subset \cup_1^K B(a_j, \epsilon) \subset \cup_1^K B(a_j, 2\epsilon) \subset (I^n \setminus \Delta).$$

Поскольку D^m-сплайны s, s_i полигармоничны в области V, содержащей B, то, полагая $f_i = s - s_i$ и применяя (5.1), получим отсюда

$$\|f_i\|_{W_p^l(B)} \le \sum_{j=1}^K \|f_i\|_{W_p^l[B(a_j,\epsilon)]} \le c(\epsilon, l, p) \sum_{j=1}^K \|f_i\|_{L_1[B(a_j,2\epsilon)]} \le K(B, \epsilon) c(\epsilon, l, p) \|f_i\|_{L_1(I^n)},$$

т.е.

$$\|s - s_i\|_{W_p^l(B)} \le c_1(B, \epsilon, l, p)\|s - s_i\|_{L_1(I^n)}.$$

Но

$$\|s - s_i\|_{L_1(I^n)} \le \|s - s_i\|_{W_2^m(I^n)} \to 0,$$

и лемма доказана.

Леммы 5.1, 5.2 позволяют свести теорему $1'$ к сплайнам на произвольных множествах $\Delta \in I^n$. Мы не будем, однако, делать этого сейчас в общей ситуации, а сформулируем соответствующее утверждение в разд. 7 для специальных $f, s(f), \Delta$, определяемых в следующем разд. 6.

6. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОНСТРУКЦИЙ

Всюду далее

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

6.1. Выбор сетки Δ. Для произвольных $0 < h < H < 2^n$ положим

$$V := V_{H,h} := \{x \in I^n : \ h < r < H\}, \quad U := U_h := \{x \in I^n : \ 0 \le r \le h\}.$$

В качестве множества Δ, на котором задается условие интерполяции $s|_\Delta = f|_\Delta$, возьмем

$$\Delta := \Delta_{H,h} := I^n \setminus V.$$

6.2. Выбор функции f. Для каждого набора (m,n,l,p) функция f будет радиальной, т.е.

$$f(x) = f(r).$$

6.3. Явный вид D^m-сплайнов. Для интерполяционного D^m-сплайна $s = s(f,m,\Delta_{H,h},I^n)$ имеем

$$s(x) \in W_2^m(I^n), \qquad s(x) \equiv f(x), \quad x \in \Delta_{H,h}, \tag{6.1}$$

а также

$$\nabla^{2m} s = 0, \quad x \in V = (I^n \setminus \Delta_{H,h}). \tag{6.2}$$

Далее, поскольку f также из $W_2^m(I^n)$, условия (6.1) повлекут

$$\frac{\partial^k s}{\partial r^k}\Big|_{r=H,h} = \frac{\partial^k f}{\partial r^k}\Big|_{r=H,h}, \quad k = 0,\ldots,m-1. \tag{6.3}$$

В силу существования и единственности решения задачи Дирихле для полигармонического уравнения функция σ, удовлетворяющая условиям (6.2), (6.3), есть сужение D^m-сплайна $s(f)$ на кольцо $V_{H,h}$, т.е.

$$\sigma(f,x) \equiv s(f,x), \quad x \in V_{H,h}.$$

Будем искать $\sigma(f,x)$ так же в виде радиальной функции $\sigma(r)$. Радиальными функциями, m-гармоническими в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, являются

$$\begin{aligned}
n &= 2, \qquad \sigma(r) = \textstyle\sum_{j=1}^m a_j r^{2j-2} + \sum_{j=1}^m b_j r^{2j-2} \ln r,\\
n &= 3, \qquad \sigma(r) = \textstyle\sum_{j=1}^m a_j r^{2j-2} + \sum_{j=1}^m b_j r^{2j-3},\\
n &= 4, \qquad \sigma(r) = \textstyle\sum_{j=1}^m a_j r^{2j-2} + b_1/r^2 + \sum_{j=2}^m b_j r^{2j-4} \ln r,\\
n &= 5, \qquad \sigma(r) = \textstyle\sum_{j=1}^m a_j r^{2j-2} + \sum_{j=1}^m b_j r^{2j-5}.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

При этом j-е члены каждой суммы полигармоничны с точным порядком j.

Краевые условия (6.3) определяют $\sigma(r)$ вида (6.4) также однозначно. Тем самым при нашем выборе $\Delta = \Delta_{H,h}$ и $f = f(r)$

$$s(f,m,\Delta_{H,h},I^n;x) = \sigma(f,r), \quad x \in V_{H,h},$$

где $\sigma(f,r)$ имеет вид (6.4) и удовлетворяет краевым условиям (6.3).

6.4. Неравенства для W_p^l-норм. Мы полагаем

$$\|g\|_{W_p^l(I^n)} := \|g\|_{L_p(I^n)} + \|D^l g\|_{L_p(I^n)},$$

где

$$\|D^l g\|_{L_p(I^n)} = \begin{cases} \left\{ \int\limits_{I^n} \left(\sum\limits_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} |D^\alpha g(x)|^2 \right)^{p/2} dx \right\}^{1/p}, & 1 \le p < \infty; \\ \max\limits_{|\alpha|=l} \|D^\alpha g\|_{L_\infty(I^n)}, & p = \infty. \end{cases}$$

При этом, как обычно, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!, \quad D^\alpha g(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} g(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Найдем для этих норм оценки снизу и сверху, удобные при рассмотрении радиальных функций $g(x) = g(r)$.

1. Для оценки снизу воспользуемся равенством

$$\frac{\partial^l g(r)}{\partial r^l} = \sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} \frac{x^\alpha}{r^l} D^\alpha g(x).$$

Применяя к правой части неравенство Шварца, получим

$$\left| \frac{\partial^l g(r)}{\partial r^l} \right|^2 \le \left(\sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} \frac{x^{2\alpha}}{r^{2l}} \right) \left(\sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} |D^\alpha g(x)|^2 \right) = \sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} |D^\alpha g(x)|^2,$$

откуда

$$\|D^l g\|_{L_p(V)} \ge c_n \left\{ \int\limits_h^H \left| \frac{\partial^l g(r)}{\partial r^l} \right| r^{n-1} \, dr \right\}^{1/p}. \tag{6.5}$$

2. Для оценки сверху воспользуемся равенством

$$D^\alpha g(x) = \sum_{k=1}^{l} \sum_{|\beta|=k} c_{\alpha\beta} \frac{x^\beta}{r^k} \frac{1}{r^{l-k}} \frac{\partial^k g(r)}{\partial r^k}.$$

Отсюда выводим

$$\|D^l g\|_{L_p(I^n)} \le c_{l,n} \max_{1 \le k \le l} \left\{ \int\limits_0^2 \left| \frac{1}{r^{l-k}} \frac{\partial^k g(r)}{\partial r^k} \right|^p r^{n-1} \, dr \right\}^{1/p}. \tag{6.6}$$

7. ДОКАЗЫВАЕМОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ

Из результатов разд. 6, 7 будет следовать, что для доказательства теоремы $1'$ в случаях $l = m, m+1$ достаточно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

$$\begin{array}{llllll} \text{1a)} & l=m, & p\in(2,\infty], & & n=2; \\ \text{1b)} & l=m, & p\in[1,2), & m=2m_1+1, & n=2; \\ \text{1c)} & l=m, & p\in[1,3/2), & m=2m_1+1, & n=3; \\ \text{1d)} & l=m, & p\in[1,2), & m=2m_1, & n=4; \\ \text{2a)} & l=m+1, & p=1, & m=2m_1 & n=4; \\ \text{2b)} & l=m+1, & p=1, & m=2m_1+1, & n=5. \end{array} \tag{7.1}$$

Тогда для любых $M,H>0$ найдутся $h>0$ и функция $f=f_{H,h}$ такие, что

$$0<h<H, \quad f\in W_p^l(I^n)\cap W_2^m(I^n), \quad \|f\|_{W_p^l(I^n)}=O_p(1), \tag{7.2}$$

и для сплайна $\sigma(f)$ такого, что

$$\nabla^{2m}\sigma=0, \quad x\in V; \qquad \frac{\partial^k[f-\sigma]}{\partial r^k}\Big|_{r=H,h}=0, \quad k=0,\dots,m-1, \tag{7.3}$$

выполнено

$$\|\sigma(f)\|_{W_p^l(V)}>M. \tag{7.4}$$

Действительно, для произвольных $\epsilon,\eta>0$, заданных в теореме $1'$, возьмем

$$H:=\min\{\epsilon,\eta\}.$$

Тогда для нашего специального $\Delta_{H,h}=I^n\setminus V_{H,h}$ при произвольном $h<H$ будем иметь

$$\mathrm{dist}\,(\Delta_{H,h},I^n)=H-h<\epsilon, \quad V=V_{H,h}\subset\eta I^n.$$

С выбранным H и заданным M подберем h и $f_{H,h}$ так, чтобы выполнялись соотношения (7.2)–(7.4). При этом для некоторого компакта $B\subset V$ также будет выполнено

$$\|\sigma(f)\|_{W_p^l(B)}>M.$$

Если теперь выбрать последовательность дискретных сеток Δ_i так, чтобы

$$\Delta_i\subset\Delta_{i+1}\subset\Delta_{H,h}, \quad \mathrm{dist}\,(\Delta_i,\Delta_{H,h})\to 0,$$

то по леммам $5.1, 5.2$

$$\|s_i(f)\|_{W_p^l(B)}\to\|s(f)\|_{W_p^l(B)}=\|\sigma(f)\|_{W_p^l(B)}$$

и, значит, для некоторого ν будем также иметь

$$\mathrm{dist}(\Delta_\nu,I^n)<\epsilon, \quad \|s_\nu(f)\|_{W_p^l(\eta I^n)}>\|s_\nu(f)\|_{W_p^l(B)}>M.$$

8. ДВА ПРИМЕРА И ОБЩАЯ ИДЕЯ

Общая конструкция f для произвольного m основана на следующих простых наблюдениях для $n=2$, $m=1$.

8.1. Пример для $p>2$**.** Пусть $n=2$, $m=1$, и пусть $V:=V_{1,h}=\{x:\ h<r<1\}$. Возьмем гладкую функцию $f=f(r)$ такую, что

$$f(r)=\begin{cases}0, & r=1,\\ 1, & r=h,\end{cases}$$

например $f(r)=f_h(r)=(1-r^2)/(1-h^2)$. Решением задачи

$$\nabla^2\sigma(x)=0,\quad x\in V;\qquad \sigma(r)|_{r=1,h}=f_h(r)|_{r=1,h}$$

является D^1-сплайн

$$\sigma_h(f_h,r)=\ln r/\ln h,\quad h<r<1.$$

Отсюда, пользуясь равенством $(\frac{\partial g}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial g}{\partial x_2})^2=(\frac{\partial g}{\partial r})^2$, получаем

$$\|D^1\sigma_h\|_{L_2(V)}=\frac{1}{\sqrt{|\ln h|}}\to 0,\quad h\to 0,$$

в то время как для $p>2$

$$\|D^1\sigma_h\|_{L_p(V)}=\frac{O_p(1)}{h^{1-2/p}|\ln h|}\to\infty,\quad h\to 0.$$

Таким образом, даже для бесконечно гладких $f=f_h$ с $\|f_h\|_{W^1_\infty(I^2)}<c$

$$\|\sigma_h(f_h)\|_{W^1_p(V_{1,h})}\to\infty,\quad h\to 0,\quad p>2.$$

8.2. Пример для $p<2$**.** Пусть снова $n=2$, $m=1$, $V=\{x:\ h<r<1\}$. Возьмем

$$f(r)=\ln^2 r.$$

Тогда для любого $\epsilon>0$

$$f\in W^1_{2-\epsilon}(I^2),\quad \|f\|_{W^1_{2-\epsilon}(I^2)}<K_\epsilon<\infty.$$

Решением задачи

$$\nabla^2\sigma=0,\quad x\in V;\qquad \sigma(r)|_{r=H,h}=f(r)|_{H,h}$$

является D^1-сплайн

$$\sigma_h(f,r)=\ln r\cdot\ln h,\quad h<r<1.$$

Поскольку для малых $h < h_0$ выполнено $\|\ln r\|_{L_1(V_h)} > C_0$, понятно, что не только для W_p^1-нормы, но даже и для L_1-нормы получим

$$\|\sigma_h\|_{L_1(V_{1,h})} = O(|\ln h|) \to \infty, \quad h \to 0.$$

8.3. Идея общей конструкции. 1. Для $n = 2$, $m = 2m_1 + 1$, $p > 2$ мы построим гладкую функцию $f \in W_\infty^m(I^2)$ вида

$$f(r) = r^{2m} + \dots,$$

для которой на кольце $V = V_{H,h}$

$$\sigma(f, r) = c_m(H) r^{2m_1} \ln r / \ln h + \dots,$$

так что при $p > 2$ получим

$$\|D^{2m_1+1}\sigma\|_{L_p(V)} \geq c_m \|1/(r \ln h)\|_{L_p(V)} \to \infty\,, \quad h \to 0,$$

точно так же, как в примере 8.1.

2. Для $n = 2$, $m = 2m_1 + 1$, $p < 2$ мы построим функцию $f \in W_p^m(I^2)$ вида

$$f(r) = r^{2m_1} \ln^2 r + \dots,$$

для которой на кольце $V_{H,h}$

$$\sigma(f, r) = c_m(H) r^{2m_1} \ln r \cdot \ln h + \dots,$$

так что

$$\|\sigma\|_{L_1(V)} \to \infty\,, \quad h \to 0,$$

как и в примере 8.2.

3. Сама конструкция достаточно громоздка. Она могла бы быть проще при наличии простой формулы двухточечной интерполяции Эрмита для системы

$$\{r^{2j}, r^{2j} \ln r\}_{j=0}^{m-1}$$

(такой, например, как формула для полиномиальной интерполяции Эрмита). Тогда можно было бы сразу выписать явный вид эрмитова D^m-интерполянта $\sigma(f)$, скажем, для

$$f(r) = r^{2m}, \quad p > 2; \qquad f(r) = r^{m-1} \ln^2 r, \quad p < 2.$$

Но таких формул нам найти не удалось.

4. Поэтому сначала мы строим некоторую функцию F такую, что

$$\frac{\partial^k F(r)}{\partial r^k}\Big|_{r=H,h} = 0, \quad k = 0, \dots, m-1,$$

и затем разлагаем ее на две части

$$F = f - \sigma(f),$$

относя к $\sigma(f)$ полигармонические слагаемые F порядка не выше m, не обязательно все из таковых. Тем самым краевые условия и полигармоничность $\sigma(f)$ выполнены автоматически и остается оценить соответствующие нормы f и $\sigma(f)$.

9. ФУНКЦИИ $\phi_m(r,h)$

Главным элементом общей конструкции для $n=2$ является радиальная функция ϕ_m, полигармоническая в $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, определяемая следующим образом.

Положим

$$\phi_1(r,h) := \ln r - \ln h$$

и для нечетных $m = 2m_1+1 = 3,5,\dots$ определим

$$\phi_m(r,h) := \int\limits_h^r \frac{1}{u}\int\limits_h^u t\cdot\phi_{m-2}(t,h)\,dt\,du.$$

Лемма 9.1. *Функция ϕ_m удовлетворяет условиям*

$$\frac{\partial^k\phi_m(r,h)}{\partial r^k}\Big|_{r=h} = 0, \quad k=0,\dots,m-1, \tag{9.1}$$

и имеет вид

$$\phi_m(r,h) = p_{m-1}(r,h)(\ln r - \ln h) + q_{m-1}(r,h), \tag{9.2}$$

где

$$\begin{aligned} p_{m-1}(r,h) &= \sum_{2i=0}^{m-1} a_{2i,m}h^{m-1-2i}r^{2i}, \quad |a_{2i,m}|<c_m;\\ q_{m-1}(r,h) &= \sum_{2i=0}^{m-1} b_{2i,m}h^{m-1-2i}r^{2i}, \quad |b_{2i,m}|<c_m. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Доказательство. (9.1) верно по построению. Формулу (9.2)–(9.3) докажем по индукции.

Для $m=1$ они верны по определению ϕ_1. Пусть они верны для некоторого нечетного m, т.е.

$$\phi_m(r,h) = \sum_{2i=0}^{m-1} a_{2i}h^{m-1-2i}r^{2i}(\ln r - \ln h) + b_{2i}h^{m-1-2i}r^{2i}.$$

Посмотрим, что произойдет с $(2i)$-ми членами суммы при преобразовании

$$\phi_{m+2}(r,h) := \int\limits_h^r \frac{1}{u}\int\limits_h^u t\cdot\phi_m(t,h)dtdu.$$

1. Для $r^{2i}(\ln r - \ln h)$ имеем (с $c := 1/(2i+2)$)

$$\begin{aligned} s_{2i}(r,h) &:= \int\limits_h^r \frac{1}{u}\int\limits_h^u t^{2i+1}(\ln t - \ln h)\,dt\,du = \int\limits_h^r \frac{1}{u}\left[cu^{2i+2}(\ln u - \ln h) - c^2(u^{2i+2}-h^{2i+2})\right]du = \\ &= c^2r^{2i+2}(\ln r - \ln h) - 2c^3(r^{2i+2}-h^{2i+2}) + c^2h^{2i+2}(\ln r - \ln h) = \\ &= c^2(r^{2i+2}+h^{2i+2})(\ln r - \ln h) - 2c^3(r^{2i+2}-h^{2i+2}), \end{aligned}$$

т.е.

$$h^{m-1-2i}s_{2i}(r,h)=c^2(h^{m+1-2(i+1)}r^{2(i+1)}+h^{m+1}(\ln r-\ln h)-2c^3(h^{m+1-2(i+1)}r^{2(i+1)}-h^{m+1}).$$

Следовательно,

$$\int_h^r \frac{1}{u}\int_h^u tp_{m-1}(t,h)\,dt\,du=p_{m+1,1}(r,h)(\ln r-\ln h)+q_{m+1,1}(r,h).$$

2. Для r^{2i} (с тем же $c=1/(2i+2)$),

$$\int_h^r \frac{1}{u}\int_h^u t^{2i+1}dt\,du=\int_h^r \frac{1}{u}\left(cu^{2i+2}-ch^{2i+2}\right)\,du=c^2(r^{2i+2}-h^{2i+2})-ch^{2i+2}(\ln r-\ln h),$$

откуда

$$\int_h^r \frac{1}{u}\int_h^u tq_{m-1}(t,h)\,dt\,du=p_{m+1,2}(r,h)(\ln r-\ln h)+q_{m+1,2}(r,h).$$

Лемма доказана.

10. СЛУЧАЙ 1a) ТЕОРЕМЫ 2: $l=m$, $p\in(2,\infty]$, $n=2$

Мы рассмотрим сперва случай нечетного $m=2m_1+1$, из которого получим затем конструкцию для четного $m=2m_1$ в качестве простого следствия.

10.1. Случай $m=2m_1+1$. Положим

$$F(r):=\frac{1}{\ln h}(r^2-H^2)^m\phi_m(r,h), \tag{10.1}$$

так что

$$\frac{\partial^k F(r)}{\partial r^k}\Big|_{r=h,H}=0,\quad k=0,1,\ldots,m-1.$$

Предложение 1a. *Функция F допускает разложение*

$$F(r)=f(r)-\sigma(f,r),$$

где

$$\nabla^{2m}\sigma=\nabla^{2(m_1+1)}\sigma=0,\quad x\in V;\quad \frac{\partial^k[f-\sigma]}{\partial r^k}\Big|_{r=h,H}=0,\quad 0\le k\le m-1. \tag{10.2}$$

При этом

$$\begin{aligned} f(r)\;&=\;c_m(r^2-H^2)^m r^{m-1}+\frac{1}{\ln h}f_2(r),\\ \sigma(f,r)\;&=\;\frac{\ln r}{\ln h}\sum_{2j=0}^{m-1}a_{2j}(H,h)h^{m-1-2j}r^{2j},\quad |a_0(H,h)|=c'_m(H), \end{aligned} \tag{10.3}$$

и выполнены оценки

$$\|f\|_{W^m_\infty(I^2)} < c_m,$$
$$\|\sigma(f)\|_{W^m_p(V)} > \frac{c_m(H)}{h^{1-2/p}|\ln h|} \to \infty\,, \quad h \to 0,\ p > 2. \tag{10.4}$$

Доказательство. 1. Краевые условия в (10.2) выполнены по определению. Полигармоничность сплайна σ, причем с порядком

$$\mu = (m-1)/2 + 1 := m_1 + 1 < m,$$

следует из его представления (10.3).

2. Установим (10.3). В силу (9.2), (9.3)

$$\phi_m(r,h) = p_{m-1}(r,h)(\ln r - \ln h) + q_{m-1}(r,h) =$$
$$= -p_{m-1}(r,h)\ln h + q_{m-1}(r,h) + p_{m-1}(r,h)\ln r =$$
$$= c_m r^{m-1}\ln h + \Big[h^2 \ln h p_{m-3}(r,h) + q_{m-1}(r,h)\Big] + p_{m-1}(r,h)\ln r :=$$
$$=: c_m r^{m-1}\ln h + S(r,h) + p_{m-1}(r,h)\ln r\,.$$

Положим также

$$P(r,H) = (r^2 - H^2)^m.$$

Тогда получим

$$F(r) := \frac{1}{\ln h}P(r,H)\phi_m(r) = \Big[c_m P(r,H) r^{m-1}\Big] + \frac{1}{\ln h}P(r,H)S(r,h) + P(r,H)p_{m-1}(r,h)\frac{\ln r}{\ln h} =:$$
$$=: f_1(r) + \frac{1}{\ln h}f_{21}(r) + Q(r)\frac{\ln r}{\ln h}.$$

Далее,

$$Q(r) := P(r,H)p_{m-1}(r,h) := (r^2 - H^2)^m p_{m-1}(r,h)$$

является четным многочленом от r степени $2m + (m-1)$, и мы разложим его как

$$Q(r) = r^{m+1}T(r,H,h) - q_{m-1}(r,H,h),$$

где

$$T(r,H,h) = \sum_{2j=0}^{m-1} d_{2j}(H,h) r^{2j}, \qquad |d_{2j}(H,h)| < c'_m(H);$$
$$q_{m-1}(r,H,h) = \sum_{2j=0}^{m-1} a_{2j}(H,h) h^{m-1-2j} r^{2j}, \qquad |a_0(H,h)| = c_m(H).$$

Отсюда

$$Q(r)\frac{\ln r}{\ln h} = \frac{1}{\ln h}T(r,H,h) r^{m+1}\ln r - q_{m-1}(r,H,h)\frac{\ln r}{\ln h} =: \frac{1}{\ln h}f_{22}(r) - \sigma(f,r).$$

Окончательно, собирая вместе все равенства и полагая $f_2 := f_{21} + f_{22}$, находим

$$F(r) = f_1(r) + \frac{1}{\ln h} f_2(r) - \sigma(f, r),$$

где

$$\begin{aligned} f_1(r) &= c_m (r^2 - H^2)^m r^{m-1}, \\ f_2(r) &= P(r, H) S(r, h) + T(r, H, h) r^{m+1} \ln r, \\ \sigma(f, r) &= \frac{\ln r}{\ln h}\, q_{m-1}(r, H, h). \end{aligned}$$

Соотношения (10.3) доказаны.

3. Переходим к оценкам (10.4). Положим

$$\|\cdot\|_{m,p} := \|\cdot\|_{W_p^m(I^2)}.$$

Очевидно,

$$\|f_1\|_{m,\infty} < c_m.$$

Далее, поскольку $P(r, H)$, $S(r, h)$, $T(r, H, h)$ — многочлены от r^2 с ограниченными (некоторым c_m) коэффициентами и для $g_m(r) := r^{m+1} \ln r$ также будет $\|g_m\|_{m,\infty} < c_m$, выводим

$$\|f_2\|_{m,\infty} \le \|P\|_{m,\infty} \cdot \|S\|_{m,\infty} + \|T\|_{m,\infty} \cdot \|g_m\|_{m,\infty} < c_m.$$

Таким образом,

$$\|f\|_{m,\infty} \le \|f_1\|_{m,\infty} + \frac{1}{|\ln h|} \|f_2\|_{m,\infty} < c_m$$

и первая оценка в (10.4) доказана.

Для оценки $\|\sigma(f)\|_{W_p^m(V)}$ снизу воспользуемся неравенством (6.5)

$$\|g\|^p_{W_p^m(V)} \ge \|D^m g\|^p_{L_p(V)} \ge c^p \int\limits_h^H \Big| \frac{\partial^m g(r)}{\partial r^m} \Big|^p r\, dr.$$

Из представления

$$\sigma(f, r) = \frac{\ln r}{\ln h} \sum_{2j=0}^{m-1} a_{m-1-2j}(H, h) h^{2j} r^{m-1-2j}, \quad |a_0(H, h)| = c_m(H),$$

находим

$$\frac{\partial^m \sigma(r)}{\partial r^m} = \frac{1}{\ln h} \sum_{2j=0}^{m-1} b_{2j}(H, h) h^{2j} r^{-1-2j}, \quad |b_{m-1}(H, h)| = c_m(H),$$

Отсюда с заменой $t = r/h$ и при $H/h > 2$ получим

$$\int\limits_h^H \left| \sum_{2j=0}^{m-1} b_{2j} h^{2j} r^{-2j-1} \right|^p r\, dr = h^{2-p} \int\limits_1^{H/h} \left| \sum_{2j=0}^{m-1} b_{2j} t^{-2j-1} \right|^p t\, dt > h^{2-p} |b_{m-1}(H, h)| \epsilon_m,$$

где

$$\epsilon_m := \inf_{c_{2j} \in \mathbb{R}} \int_1^2 |t^{-m} + \sum_{2j=0}^{m-3} c_{2j} t^{-2j-1}|^p t\, dt.$$

Окончательно

$$\|\sigma(f)\|_{W_p^m(V)} > \frac{c_m(H)}{h^{1-2/p}|\ln h|} \to \infty, \quad h \to 0,\ p > 2.$$

Предложение 1а доказано.

10.2. Случай $m = 2m_1$. Простым следствием предложения 1а является

Предложение 1а$'$. *Для четного $m = 2m_1$ и любых $0 < h < H$ существует $g = g(x)$ такая, что*

$$\|g\|_{W_\infty^{2m_1}(I^2)} < c_m, \tag{10.5}$$

в то время как для сплайна $\sigma(g)$ такого, что

$$\nabla^{2(2m_1)}\sigma = 0, \quad x \in V; \quad \frac{\partial^k[g - \sigma(g)]}{\partial r^k}\Big|_{r=h,H} = 0, \quad 0 \le k \le 2m_1 - 1, \tag{10.6}$$

выполнено

$$\|D^{2m_1}\sigma(g)\|_{L_p(V)} = \frac{c_m(H)}{h^{1-2/p}|\ln h|} \to \infty, \quad h \to 0,\ p > 2. \tag{10.7}$$

Доказательство. Возьмем функции f и $\sigma(f)$ из предложения 1а, т.е. такие, что

$$\nabla^{2(m_1+1)}\sigma(f) = 0, \quad x \in V; \qquad \frac{\partial^k[f - \sigma(f)]}{\partial r^k}\Big|_{r=h,H} = 0, \quad 0 \le k \le 2m_1,$$

и выполнены оценки

$$\|f\|_{W_\infty^{2m_1+1}(I^2)} < c_m,$$

$$\|D^{2m_1+1}\sigma(f)\|_{L_p(V)} > \frac{c_m(H)}{h^{1-2/p}|\ln h|} \to \infty, \quad h \to 0,\ p > 2.$$

Поскольку $(D^m f)^2 := \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha (D^\alpha f)^2$, для каждого h найдется $\alpha = \alpha_h$, $|\alpha| = 2m_1 + 1$, такое, что

$$\left\| \frac{\partial^{2m_1+1}\sigma(f)}{\partial x^\alpha} \right\|_{L_p(V)} > \frac{c_m(H)}{h^{1-2/p}|\ln h|} \to \infty, \quad h \to 0,\ p > 2,$$

Пусть j — номер любой ненулевой компоненты $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Положим

$$g(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \quad \sigma(g, x) := \frac{\partial \sigma(f, x)}{\partial x_j}.$$

Тогда, очевидно, выполнены оценки (10.6), (10.7), а также краевые условия в (10.5). Что касается порядка полигармоничности $\sigma(g) = \partial\sigma(f)/\partial x_j$, то, поскольку операция дифференцирования сохраняет этот порядок, имеем

$$\nabla^{2\mu}\sigma(g) = 0, \quad \mu = m_1 + 1 \le 2m_1 = m.$$

Предложение 1а$'$, а с ним и случай 1а) теоремы 2 доказаны.

11. СЛУЧАЙ 1b) ТЕОРЕМЫ 2: $l = m$, $p \in [1, 2)$, $m = 2m_1 + 1$, $n = 2$

Для этого, как и для каждого последующего нового случая теоремы 2, мы используем ряд прежних обозначений F, f ,f_1 , f_2 и т.п. для функций, отличающихся от случая к случаю.

Мы построим функцию f, удовлетворяющую теореме 2 при условии 1b), в виде

$$f(r) = \begin{cases} f_1(r), & x \in I_h^2, \\ f_2(r), & x \in U_h, \end{cases} \qquad U_h = \{x:\ 0 \le r \le h\}, \quad I_h^2 = (I^2 \setminus U_h),$$

где

$$\frac{\partial^k f_1(r)}{\partial r^k}\Big|_{r=h} = \frac{\partial^k f_2(r)}{\partial r^k}\Big|_{r=h}, \quad k = 0, \dots, m-1,$$

т.е. f будет склеена из двух кусков. Ясно, что тогда

$$\sigma(f, r) \equiv \sigma(f_1, r),$$

и мы будем рассматривать именно $\sigma(f_1)$. Оценка

$$\|f\|_{W_p^m(I^2)} = O_p(1)$$

ввиду гладкой склейки будет следовать из (равномерных по h) оценок

$$\|f_1\|_{W_p^m(I_h^2)} = O_p(1), \quad \|f_2\|_{W_p^m(I_h^2)} = O_p(1).$$

Необходимость таких рассмотрений связана с нашим методом построения f_1 и $\sigma(f_1)$, в котором функции f_1, хотя и ограничены в $W_p^m(I_h^2)$ равномерно по $h > 0$, не принадлежат $W_p^m(I^2)$ из-за особенностей в нуле.

В этом разделе мы построим f_1 и $\sigma(f_1)$.

Для $p < 2$, $l = m = 2m_1 + 1$, $n = 2$ положим

$$F(r) := \phi_m(r, H) \cdot \phi_m(r, h), \tag{11.1}$$

так что

$$\frac{\partial^k F(r)}{\partial r^k}\Big|_{r=h,H} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Предложение 1b. *Функция F допускает разложение*

$$F(r) = f_1(r) - \sigma(f_1, r),$$

где

$$\nabla^{2m}\sigma = 0, \quad x \in V; \qquad \frac{\partial^k [f_1 - \sigma]}{\partial r^k}\Big|_{r=h,H} = 0, \quad 0 \le k \le m-1. \tag{11.2}$$

При этом

$$\begin{gathered} f_1(r) = p_{m-1}(r, H)\, p_{m-1}(r, h) \ln^2 r, \\ p_{m-1}(r, t) = \sum_{2j=0}^{m-1} a_{2j} t^{m-1-2j} r^{2j}, \quad |a_{2j}| < c_m, \\ \sigma(f_1, r) = O_m(1) r^{2m-2} \ln r \cdot \ln h + \ln r P_{m-2}(r^2) + Q_{m-1}(r^2), \\ P_{m-2} \in \pi_{m-2}, \quad Q_{m-1} \in \pi_{m-1}, \end{gathered} \tag{11.3}$$

и выполнены оценки

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{W_p^m(I_h^2)} &= O_p(1), \quad 1 \le p < 2, \\ \|\sigma(f_1)\|_{L_1(V)} &= O_H(|\ln h|) \to \infty, \quad h \to 0. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Доказательство. 1. Краевые условия в (11.2) выполнены по определению (11.1). Полигармоничность сплайна $\sigma(f_1)$ с порядком m следует из его представления в (11.3).

2. Установим (11.3). По лемме 9.1

$$\phi_m(r,t) = p_{m-1}(r,t)\ln r - p_{m-1}(r,t)\ln t + q_{m-1}(r,t),$$

откуда

$$\begin{aligned} F(r) := \phi_m(r,h)\phi_m(r,H) = \\ = [p_{m-1}(r,h)\ln r - p_{m-1}(r,h)\ln h + q_{m-1}(r,h)]\times \\ \times[p_{m-1}(r,H)\ln r - p_{m-1}(r,H)\ln H + q_{m-1}(r,H)] =: \\ =: f_1(r) - \sigma(f_1,r). \end{aligned} \tag{11.5}$$

Мы здесь положили

$$f_1(r) := p_{m-1}(r,h)p_{m-1}(r,H)\ln^2 r,$$

а к $\sigma(f_1,r)$ отнесли все остальные слагаемые, получающиеся при раскрытии скобок в (11.5).

Поскольку p_{m-1}, q_{m-1} являются четными многочленами степени $m-1 = 2m_1$ вида

$$p_{m-1}(r,t) = c_{2m_1}r^{2m_1} + \sum_{2j=0}^{2m_1-2} c_{2j}(t)r^{2j}, \quad q_{m-1}(r,t) = d_{m-1}r^{2m_1} + \sum_{2j=0}^{2m_1-2} d_{2j}(t)r^{2j},$$

то из (11.5) получим

$$\sigma(f_1,r) = \sum_{2j=0}^{2m-2}\left(a_{2j}(H,h)r^{2j}\ln r + b_{2j}(H,h)r^{2j}\right), \tag{11.6}$$

причем коэффициент a_{2m-2} при $r^{2m-2}\ln r$ равен

$$a_{2m-2} = -c_{2m_1}^2(\ln H + \ln h) + 2c_{2m_1}d_{2m_1} = O_m(1)\ln h.$$

Соотношения (11.3) доказаны.

3. Оценим соответствующие нормы f_1 и $\sigma(f_1)$.

Для f_1 имеем

$$f_1(r) := p_{m-1}(r,H)p_{m-1}(r,h)\ln^2 r,$$

и, поскольку $\|p_{m-1}(\cdot,H)\|_{m,\infty} < c_m$, нам достаточно оценить $W_p^m(I_h^2)$-норму от

$$p_{m-1}(r,h)\ln^2 r = \sum_{2j=0}^{m-1} a_{2j}h^{m-1-2j}r^{2j}\ln^2 r.$$

Оценим $W_p^m(I_h^2)$-норму каждого слагаемого суммы при помощи неравенства (6.6):

$$\|D^m g\|^p_{L_p(I_h^2)} \le c_m^p \max_{1\le k\le m} \int_h^2 \Big|\frac{1}{r^{m-k}}\frac{\partial^k g(r)}{\partial r^k}\Big|^p r\,dr.$$

Имеем (при $p<2$ и $0\le 2j\le m-1$)

$$h^{(m-1-2j)p}\|D^m r^{2j}\ln^2 r\|_p^p \le c_1(m,p)h^{(m-1-2j)p}\int_h^2 r^{(2j-m)p+1}|\ln^{2p} r|\,dr \le$$
$$\le c_2(m,p)h^{(m-1-2j)p} + c_3(m,p)h^{-p+2}|\ln^5 h| \le c_4(m,p).$$

Таким образом,

$$\|D^m f_1\|_{L_p(I_h^2)} \le c_{m,p}$$

и, так как очевидно, что $\|f_1\|_{L_p(I_h^2)} < c'_{m,p}$, оценка (11.4) для f_1 установлена.

Оценим теперь L_1-норму σ. Для этого введем величину

$$\epsilon_m(H) := \inf_{P_{m-2},\,Q_{m-1}} \int_{H/2}^H \Big| r^{2m-2}\ln r + P_{m-2}(r^2)\ln r + Q_{m-1}(r^2)\Big| r\,dr.$$

Понятно, что

$$\epsilon_m(H) > 0,$$

и действительно зависит только от m и H. Мы не будем выяснять точный порядок этой величины.

Теперь, поскольку

$$\sigma(f_1,r) = \sum_{2j=0}^{2m-2}\left(a_{2j}r^{2j}\ln r + b_{2j}r^{2j}\right), \quad a_{2m-2} = O_m(1)\ln h,$$

имеем

$$\|\sigma(f_1)\|_{L_1(V)} = c\int_h^H |\sigma(g_1,r)|r\,dr > c\int_{H/2}^H |\sigma(g_1,r)|r\,dr > ca_{2m-2}\epsilon_m(H) > O_m(1)\epsilon_m(H)|\ln h|,$$

т.е.

$$\|\sigma(f_1)\|_{L_1(V)} = O_{m,H}(|\ln h|) \to \infty, \quad h\to 0.$$

Предложение 1b доказано.

12. ПРОДОЛЖЕНИЕ СЛУЧАЯ 1b) ТЕОРЕМЫ 2: СГЛАЖИВАНИЕ f_1

Функции $f_1(r) := f_1(r; H, h)$, построенные в предыдущем разделе, имеют ограниченную W_p^m-норму в I_h^2, т.е. вне круга $U_h = \{x : \ r \le h\}$, причем равномерно по $h > 0$, но имеют особенность в нуле. В этом разделе мы показываем возможность гладкого продолжения f_1 внутрь круга U_h.

Лемма 12.1. *При любом $h > 0$ существует f_2 такая, что*

$$\frac{\partial^k f_2(r)}{\partial r^k}\Big|_{r=h} = \frac{\partial^k f_1(r)}{\partial r^k}\Big|_{r=h}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1;$$
$$\|f_2\|_{W_p^m(U_h)} = O_p(1), \quad 1 \le p < 2.$$

Доказательство. Поскольку

$$f_1(r) := p_{m-1}(r, H)[p_{m-1}(r, h)\ln^2 r] := f_{11}(r) f_{12}(r),$$

где

$$\|f_{11}\|_{W_\infty^m(I^2)} := \|p_{m-1}(\cdot, H)\|_{W_\infty^m(I^2)} < c_m,$$

нам достаточно сгладить второй сомножитель

$$f_{12}(r) := p_{m-1}(r, h)\ln^2 r = \ln^2 r \sum_{2j=0}^{m-1} a_{2j} h^{m-1-2j} r^{2j} =$$
$$= h^{m-1}\ln^2 r \sum_{2j=0}^{m-1} a_{2j} h^{-2j} r^{2j} =: h^{m-1} J(r). \tag{12.1}$$

Построим многочлен $s(r) = s(r, h)$ такой, что

$$s(r, h)\Big|_{r=h} = h^{m-1}; \quad \frac{\partial^k s(r, h)}{\partial r^k}\Big|_{r=h} = 0, \quad k = 1, \dots, m-1. \tag{12.2}$$

Его можно определить как

$$s(r, h) := c_m(h) \int_0^r t^{m-2}(t-h)^{m-1} du,$$

где $c_m(h)$ выбрана так, чтобы при $r = h$ выполнялось $s(r, h) = h^{m-1}$, тогда (12.2), очевидно, выполнено. Нетрудно показать, что определенный так $s(r, h)$ имеет вид

$$s(r, h) = r^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} b_i h^{-i} r^i.$$

Теперь мы сгладим $f_{12}(r)$ в (12.1) следующим образом:

$$f_{12}(r) = h^{m-1} J(r) \to s(r, h) J(r) = r^{m-1} \ln^2 r \sum_{i=0}^{2m-2} d_i h^{-i} r^i =: f_{22}(r)\,.$$

По правилу Лейбница в силу (12.2) сразу получаем

$$\frac{\partial^k f_{22}(r)}{\partial r^k}\Big|_{r=h} = \frac{\partial^k f_{12}(r)}{\partial r^k}\Big|_{r=h}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Остается показать, что $W_p^m(U_h)$-нормы функции

$$f_{22}(r,h) = \sum_{i=0}^{2m-2} d_i (r^{m-1}\ln^2 r)(r/h)^i$$

ограничены равномерно по $h > 0$.

Для каждого слагаемого суммы имеем

$$|r^{m-1}\ln^2 r| < c_m, \quad |(r/h)^i| < 1, \quad r < h,$$

т.е. $f_{22} \in L_\infty(U)$.

Для оценки L_p-нормы m-х производных воспользуемся правилом Лейбница и соотношениями

$$\begin{aligned} \|D^{m-k}(r/h)^i\|_{L_\infty(U)} &\leq c_m h^{-(m-k)}, \\ \|D^k r^{m-1}\ln^2 r\|_{L_p(U)} &\leq c_m h^{m-1-k+2/p}\ln^2 h, \end{aligned}$$

что даст

$$\|D^m f_{22}\|_{L_p(U_h)} \leq c_m h^{-1+2/p}\ln^2 h \to 0, \quad h \to 0, \ p < 2.$$

Лемма 12.1 доказана.

Таким образом мы построили функцию $f \in W_p^m(I^2)$, удовлетворяющую всем требованиям (7.2)–(7.4) теоремы 2 в случае 1b), но нам нужно еще, чтобы f была также из $W_2^m(I^2)$. Но очевидно, что мы можем далее сгладить f в малой окрестности нуля U_ϵ до $\tilde f \in W_2^m(I^2)$ так, чтобы для любого $\epsilon > 0$

$$\text{i)} \quad \tilde f(x) = f(x), \ x \in I^2 \setminus U_\epsilon; \qquad \text{ii)} \quad \|\tilde f - f\|_{W_p^m(I^2)}\| < \epsilon.$$

Тогда для $\epsilon < h$ функция $\tilde f$ будет удовлетворять всем требованиям теоремы 2 для случая 1b).

Действительно, условие i) повлечет равенство $\sigma(\tilde f) = \sigma(f)$ и, значит, все свойства сплайна останутся неизменными. А в силу ii) норма $\tilde f$ будет также ограничена.

Теорема 2 для случая 1b) доказана.

13. СЛУЧАЙ 1d) ТЕОРЕМЫ 2: $l = m$, $p \in [1, 2)$, $m = 2m_1$, $n = 4$

В этом случае конструкция f является незначительной модификацией случая 1b). Мы покажем, что для функции

$$f_1(r) := r^{2m_1-2}\ln^2 r + \ldots, \qquad f \in W_{2-\epsilon}^{2m_1}(I^4) \quad \forall \epsilon > 0,$$

сплайн Эрмита $\sigma(f_1)$ на кольце V будет иметь вид

$$\sigma(f_1, r) = r^{2m_1-2}\ln r \cdot \ln h + \ldots,$$

откуда последует неограниченность $\|\sigma(f_1)\|_{L_1(V)}$ при $h \to 0$.

Сглаживание f_1 в окрестности нуля осуществляется, как в разд. 11.

13.1. Вспомогательные леммы. Положим

$$\psi_2(r,H) := 2H^2(\ln r - \ln H) - (r^2 - H^2),$$

так что

$$\frac{\partial^k \psi_2(r)}{\partial r^k}\Big|_{r=H} = 0, \quad k = 0, 1;$$

и для четных $m = 2m_1 = 4, 6, \ldots$ определим

$$\psi_m(r,H) := \int_H^r \frac{1}{u} \int_H^u t \cdot \psi_{m-2}(t,H)\, dt\, du.$$

Лемма 13.1. *Функция ψ_m удовлетворяет соотношениям*

$$\frac{\partial^k \psi_m(r,H)}{\partial r^k}\Big|_{r=H} = 0, \quad k = 0, \ldots, m-1, \tag{13.1}$$

и имеет вид

$$\psi_m(r,H) = H^2 p_{m-2}(r,H)(\ln r - \ln H) + q_m(r,H), \tag{13.2}$$

где

$$\begin{array}{rcll} p_{m-2}(r,H) & = & \sum\limits_{2i=0}^{m-2} a_{2i,m} H^{m-2i} r^{2i}, & |a_{2i,m}| \sim c_m; \\ q_m(r,H) & = & \sum\limits_{2i=0}^{m} b_{2i,m} H^{m-2-2i} r^{2i}, & |b_{2i,m}| \sim c_m. \end{array} \tag{13.3}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.1 для ϕ_m.

Далее, для функции $\phi_l(r,h)$, определенной в (9.1)–(9.3), для нечетных $l = 2l_1 + 1$ положим

$$\chi_m(r,h) := \chi_{2m_1}(r,h) := \frac{1}{r}\frac{\partial \phi_{2m_1+1}(r,h)}{\partial r}.$$

Лемма 13.2. *Функция χ_m удовлетворяет соотношениям*

$$\frac{\partial^k \chi_m(r,h)}{\partial r^k}\Big|_{r=h} = 0, \quad k = 0, \ldots, m-1, \tag{13.4}$$

и имеет вид

$$\chi_m(r,h) = s_{m-2}(r,h)(\ln r - \ln h) + t_{m-2}(r,h) + b_m h^m r^{-2}, \tag{13.5}$$

где

$$\begin{array}{rcll} s_{m-2}(r,h) & = & \sum\limits_{2i=0}^{m-2} c_{2i,m} h^{m-2-2i} r^{2i}, & |c_{2i,m}| \sim c_m; \\ t_{m-2}(r,h) & = & \sum\limits_{2i=0}^{m-2} d_{2i,m} h^{m-2-2i} r^{2i}, & |d_{2i,m}| \sim c_m. \end{array} \tag{13.6}$$

Доказательство. Эта лемма есть прямое следствие леммы 9.1 для ϕ_{2m_1+1}.

13.2. Построение f_1. Положим теперь

$$F(r) := \psi_m(r,H)\chi_m(r,h),$$

так что

$$\frac{\partial^k F(r)}{\partial r^k}\Big|_{r=H,h} = 0, \quad k = 0,\dots,m-1. \tag{13.7}$$

Предложение 1d. *Функция F допускает разложение*

$$F(r) = f_1(r) - \sigma(f_1, r),$$

где

$$\nabla^{2m}\sigma = 0, \quad x \in V; \qquad \frac{\partial^k [f_1 - \sigma]}{\partial r^k}\Big|_{r=h,H} = 0, \quad 0 \le k \le m-1. \tag{13.8}$$

При этом

$$\begin{aligned} f_1(r) &= H^2 p_{m-2}(r,H)\, s_{m-2}(r,h)\ln^2 r + c_m H^m h^m r^{-2}\ln r + c'_m r^{2m-2}\ln r,\\ \sigma(f_1,r) &= O_m(1) r^{2m-4}\ln r \ln h + c(H,h) r^{-2} + P_{m-3}(r^2)\ln r + Q_{m-1}(r^2), \end{aligned} \tag{13.9}$$

и выполнены оценки

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{W_p^m(I_h^4)} &= O_p(1), \quad p \in [1,2);\\ \|\sigma(f_1)\|_{L_1(V_h)} &= O_H(|\ln h|) \to \infty, \quad h \to 0. \end{aligned} \tag{13.10}$$

Доказательство аналогично доказательству предложения 1b из разд. 11. Пользуясь формулами (13.2), (13.5) для ψ_m и χ_m соответственно, мы раскрываем произведение в формуле

$$F(r) := f_1(r) - \sigma(f_1, r) := \psi_m(r)\chi_m(r)$$

и относим к $\sigma(f_1)$ все m-гармонические слагаемые, т.е. входящие (для $n = 4$) в набор

$$r^{-2},\ \{r^{2j}\ln r\}_{j=0}^{m-2},\ \{r^{2j}\}_{j=0}^{m-1}.$$

Все остальные слагаемые составляют f_1. Так получается (13.9).

Условия (13.8) выполнены автоматически.

Оценка (13.10) легко выводится из (13.9). Оценка для $\|\sigma(f_1)\|_{L_1(V)}$ очевидна ввиду множителя $\ln h$. Норма f_1 оценивается так.

Для первого слагаемого f_1 в (13.9) имеем для его сомножителей

$$\|p_{m-2}(\cdot,H)\|_{W_\infty^m(I^4)} < c_m, \quad \|s_{m-2}(\cdot,h)\ln^2(\cdot)\|_{W_p^m(I_h^4)} < c_m.$$

Первое неравенство очевидно; второе неравенство верно, поскольку

$$s_{m-2}(r,h)\ln^2 r = \sum_{2j=0}^{m-2} c_{2j} h^{m-2-2j} r^{2j}\ln r$$

и $W_p^m(I_h^4)$-норма каждого слагаемого ограничена. Последнее устанавливается так же, как и для второго слагаемого f_1 в (13.9), для которого имеем (при $p \in [1,2)$ и $n=4$)

$$h^{mp}\|D^m r^{-2}\ln r\|_{L_p(I_h^4)} \le c_1(m,p)h^{mp}\int_h^2 r^{(-2-m)p+3}\ln^p r\,dr \le$$
$$\le c_2(m,p)h^{mp} + c_3(m,p)h^{-2p+4}|\ln^3 h| \le c_4(m,p)\,.$$

Наконец, третье слагаемое f_1 в (13.9), а именно $r^{2m-2}\ln r$, очевидно из $W_\infty^m(I^4)$.

Предложение 1d доказано.

13.3. Сглаживание f_1. Это может быть проделано так же, как и в случае 1b), (см. разд. 12).

Случай 1d) теоремы 2 доказан.

14. СЛУЧАЙ 2a) ТЕОРЕМЫ 2: $l=m+1$, $p=1$, $m=2m_1$, $n=4$

Этот случай немедленно следует из результатов предыдущего разд. 13: легко проверить, что для функций $f_1 := f_{1;H,h}$, определенных в (13.9), равномерно по $h>0$ выполнено

$$\|f_1\|_{W_1^{m+1}(I_h^4)} = O(1).$$

Например, для того же слагаемого $c_m H^m h^m r^{-2}\ln r$ в представлении (13.9) для $f_1(r)$ имеем (при $p=1$ и $n=4$)

$$h^m\|D^{m+1}r^{-2}\ln r\|_{L_1(I_h^4)} \le c_1(m)h^m\int_h^2 r^{-2-(m+1)+3}|\ln r|\,dr \le$$
$$\le c_2(m)h^m + c_3(m)h|\ln h| \le c_4(m)h|\ln h| \to 0, \quad h\to 0.$$

Сглаживание $f_1 \in W_1^{m+1}(I_h^4)$ до функции $f \in W_1^{m+1}(I^4)\cap W_2^m(I^4)$ с сохранением порядка W_1^{m+1}-нормы осуществляется, как и ранее.

Так доказывается случай 2a) теоремы 2.

15. СЛУЧАЙ 1c) ТЕОРЕМЫ 2: $l=m$, $p\in[1,3/2)$, $n=3$

В случае нечетной размерности n мы не можем использовать результаты, полученные ранее для четного n, поскольку полигармонические функции имеют иной характер. Но этот случай весьма прост сам по себе.

Положим

$$F(r) := \frac{1}{r}(r-H)^m(r-h)^{m-1}(\ln r - \ln h). \tag{15.1}$$

Предложение 1c. *Функция F допускает разложение*

$$F(r) = f_1(r) - \sigma(f_1, r),$$

где

$$\nabla^{2m}\sigma = 0, \quad x \in V; \qquad \frac{\partial^k[f_1-\sigma]}{\partial r^k}\Big|_{r=h,H} = 0, \quad 0 \le k \le m-1. \tag{15.2}$$

При этом

$$\begin{aligned} f_1(r) &= r^{-1}(r-H)^m(r-h)^{m-1}\ln r; \\ \sigma(f_1,r) &= r^{-1}(r-H)^m(r-h)^{m-1}\ln h, \end{aligned} \tag{15.3}$$

и выполнены оценки

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{W_p^m(I_h^3)} &= O_p(1), \quad p \in [1,3/2); \\ \|\sigma(f_1)\|_{L_1(V)} &= O_H(|\ln h|) \to \infty, \quad h \to 0. \end{aligned} \tag{15.4}$$

Доказательство. Все соотношения очевидны, кроме оценок $\|f_1\|_{W_p^m(I_h^3)}$ в (15.4). Докажем их справедливость.

Поскольку в представлении (15.3) для f_1 множитель $(r-H)^m$ ограничен в $W_\infty^m(I^3)$, достаточно доказать ограниченность по норме $W_p^m(I_h^3)$ множителя

$$r^{-1}(r-h)^{m-1}\ln r = \sum_{j=0}^{m-1} a_j h^{m-1-j} r^{j-1}, \quad |a_j| < c_m.$$

Для слагаемых суммы имеем (при $p \in [1,3/2)$, $0 \le j \le m-1$ и $n=3$)

$$h^{(m-1-j)p}\|D^m r^{j-1}\ln r\|^p_{L_p(I_h^3)} \le c_1(m,p)h^{(m-1-j)p}\int_h^2 r^{(j-1-m)p+2}\ln^p r\,dr \le$$

$$\le c_2(m,p)h^{(m-1-j)p} + c_3(m,p)h^{-2p+3}|\ln h|^{5/2} \le c_4(m,p).$$

Предложение 1с доказано.

Остается сгладить f_1 до $f \in W_p^m(I^3) \cap_2^m (I^3)$, и случай 1с) теоремы 2 доказан.

16. СЛУЧАЙ 2b) ТЕОРЕМЫ 2: $l=m+1$, $p=1$, $n=5$

Этот случай также прост. Положим

$$G(r) := (r-H)^m(r-h)^{m-1}(r^2+Ar+B).$$

При этом коэффициенты A, B подберем так, чтобы полином $G(r)$ не содержал мономов r и r^{2m}. Пусть

$$G(r) = \sum_{i=0}^{2m+1} a_i r^i.$$

Тогда имеем

$$a_{2m} = A - mH - (m-1)h = 0,$$

$$a_1 = H^{m-1}h^{m-2}(A\cdot Hh - B(mh+(m-1)H)) = 0,$$

откуда

$$A = O_m(H), \quad B = O(h).$$

Следовательно,

$$G(r) = c_{2m+1}r^{2m+1} + \sum_{j=m+1}^{2m-1} c_j(H,h)r^j + \sum_{j=2}^{m} c_j(H,h)h^{m-j}r^j + c_1(H,h)h^m, \quad |c_j(H,h)| < c'_m. \tag{16.1}$$

Положим теперь

$$F(r) := \frac{1}{r^3}G(r)(\ln r - \ln h),$$

так что

$$\frac{\partial^k F(r)}{\partial r^k}\Big|_{r=H,h} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Предложение 2b. *Функция F допускает разложение*

$$F(r) = f_1(r) - \sigma(f_1, r),$$

где

$$\nabla^{2m}\sigma = 0, \quad x \in V; \qquad \frac{\partial^k[f_1 - \sigma]}{\partial r^k}\Big|_{r=h,H} = 0, \quad 0 \le k \le m-1. \tag{16.2}$$

При этом

$$\begin{aligned} f_1(r) &= r^{-3}G(r)\ln r, \\ \sigma(f_1, r) &= r^{-3}G(r)\ln h \end{aligned} \tag{16.3}$$

и выполнены оценки

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{W_1^{m+1}(I_h^5)} &= O(1), \\ \|\sigma(f_1)\|_{L_1(V)} &= O_H(\ln h) \to \infty, \quad h \to 0. \end{aligned} \tag{16.4}$$

Доказательство. Представление (16.3) очевидно.

Из (16.1) получаем, что $r^{-3}G(r)$ является линейной комбинацией функций

$$\{r^{2j-5},\, r^{2j-2}\}_{j=1}^m,$$

полигармонических с порядком $j \le m$, т.е. $\sigma(f_1)$ m-гармонична. Краевые условия выполнены по определению F, таким образом соотношения (16.2) верны.

Докажем оценки (16.4). Для $L_1(V)$-нормы $\sigma(f_1)$ оценка очевидна ввиду множителя $\ln h$; установим оценку для нормы f_1. Из (16.1), (16.3) находим

$$f_1(r) = P_m(r, H, h)r^{m-2}\ln r + \sum_{j=0}^{m} d_j(H,h)h^{m-j}r^{j-3}\ln r.$$

Первое слагаемое в этом представлении заведомо из $W_1^{m+1}(I^5)$. Для слагаемых суммы имеем (при $p=1$, $0 \le j \le m$ и $n=3$)

$$h^{m-j}\|D^{m+1}r^{j-3}\ln r\|_{L_1(I_h^5)} \le c_1(m)h^{m-j}\int\limits_h^2 r^{j-3-(m+1)+4}|\ln r|\,dr \le$$

$$\le c_2(m,p)h^{m-j} + c_3(m)h|\ln h| \le c_4(m,p).$$

Предложение 2b доказано.

Опять сглаживаем f_1 до $f \in W_1^{m+1}(I^5)\cap W_2^m(I^5)$ и случай 2b) теоремы 2, а вместе с ним и вся теорема 2 доказаны.

17. СЛУЧАЙ 3) ТЕОРЕМЫ 1′: $l = m-1$, $p=\infty$, $n=4$

Этот случай не удалось свести к предыдущей схеме для $l = m, m+1$, в которой использовались D^m-сплайны Эрмита, интерполирующие значения функции f и ее честных производных на многообразиях размерности $n-1$. Но он сводится к кратной интерполяции Эрмита в точках (на многообразиях размерности 0).

17.1. Редукция к кратным D^m-сплайнам. По теореме вложения Соболева

$$m - n/2 > k \ge 0 \quad\Rightarrow\quad W_2^m(I^n) \to C^k(I^n)$$

и, значит, в определении D^m-сплайна как решения вариационной задачи

$$\|D^m g\|_{L_2(I^n)} \to \min$$

при интерполяционных ограничениях мы можем задавать в качестве таковых не только значения $g(x)$ в точках $t_i \in \Delta$, но и значения частных производных $D^\alpha g(x)$ до порядка k включительно.

Точнее, при $0 \le k < m - n/2$ для мультииндексов $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ положим

$$\mathcal{A}_k := \{\alpha : \ |\alpha| \le k\}$$

и под сеткой Δ_A будем понимать совокупность пар

$$\Delta_A := (\Delta, A) := \{(t_i, A_i)\}_{i=1}^N,$$

где

$$\Delta = \{t_i\}, \quad t_i \in I^n, \qquad A = \{A_i\}, \quad A_i \subset \mathcal{A}_k.$$

Тогда для любой $f \in W_2^m(I^n)$ мы можем определить *кратный* D^m-сплайн $s_A(f)$ как решение задачи

$$s_A(f) = s(f, m, \Delta_A, \Omega) =$$
$$= \arg\ \min\left\{\|D^m g\|_2 : \ g \in W_2^m(\Omega),\ D^\alpha g(t_i) = D^\alpha f(t_i),\ \alpha \in A_i,\ 1 \le i \le N\right\}.$$

Существование и единственность $s_A(f)$ известны из общей теории вариационных сплайнов. Для обычного сплайна $s(f)$ имеем

$$s(f) = s_A(f), \quad A = \mathcal{A}_0.$$

Следующая лемма позволяет свести исходную задачу о б.сх. дискретных D^m-сплайнов в $C^{m-1}(\Omega)$ к аналогичной задаче о кратных D^m-сплайнах. Мы приводим ее без доказательства и только для случая $n = 4$.

Лемма 17.1. *Пусть* $n = 4$, $m > 2\,(= n/2)$, $k_* = m - 3\,(< m - n/2)$. *Пусть далее* $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ — *единичный орт* $\mathbb{R}^4$ *и для произвольных* $t_i \in I^4$, $\eta > 0$

$$\delta_\eta = \{t_1 + j\eta e_1\}_{j=0}^{k_*}, \quad \delta_2 = \{t_i\}_{i=2}^{N}, \quad \Delta_\eta = \delta_\eta \cup \delta_2;$$
$$\Delta = \{t_1\} \cup \Delta_2, \quad A_1 = \{je_1\}_{j=0}^{k_*}, \quad A_i = \{\mathbf{0}\}.$$

Наконец, пусть для произвольной $f \in W_2^m(I^4)$

$$s_\eta := s(f, m, \Delta_\eta, I^4),$$
$$s_A := s(f, m, \Delta_A, I^4) :=$$
$$:= \arg\min\left\{ \|D^m g\|_2 :\ g \in W_2^m(I^4),\ \frac{\partial^j g}{\partial x_1^j} = \frac{\partial^j f}{\partial x_1^j}|_{x=t_1},\ 0 \le j \le k_*\ g|_{\Delta_2} = f|_{\Delta_2} \right\}.$$

Тогда

$$\|s_A - s_\eta\|_{W_2^m(I^4)} \to 0, \quad \eta \to 0.$$

17.2. Неограниченность кратных D^m-сплайнов в C^{m-1}. Из леммы 17.1 и леммы 5.2 следует, что на любом шаре $B(a, \epsilon)$ таком, что

$$B(a, 2\epsilon) \subset V := I^4 \setminus \{\Delta_\eta\}_{\eta<\eta_0},$$

имеет место сходимость

$$\|s_A - s_\eta\|_{C^{m-1}[B(a,\epsilon)]} \to 0, \quad \eta \to 0.$$

Таким образом, для доказательства последнего случая 3) теоремы $1'$ достаточно доказать неограниченность s_A в $C^{m-1}(I^n)$.

Мы докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие*

$$3) \qquad l = m - 1, \quad p = \infty, \quad n = 4.$$

Пусть, далее, $k_* = m - 3$ *и задана произвольная сетка*

$$\Delta_A = \{t_i, A_i\}_1^N, \quad t_i \in \Delta, \quad A_i \in A, \quad \max_i \max_{\alpha\in A_i} |\alpha| = k_*.$$

Тогда для любой $f \in C^{m-1} \cap W_2^m(I^4)$ *и любого* $M > 0$ *найдется шар* $B(a, 2\epsilon)$ *такой, что*

$$B(a, 2\epsilon) \subset I^4 \setminus \Delta, \quad \|D^{m-1} s_A(f)\|_{L_\infty[B(a,\epsilon)]} > M. \tag{17.1}$$

Доказательство. Для $s_A(f)$ имеет место представление, аналогичное представлению (2.1) для $s(f)$, а именно для $A = \{A_i\}$ с $A_i \in \mathcal{A}_k$, $k < m - n/2$,

$$s_A(f, x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha\in A_i} c_{i\alpha} D^\alpha G(x - t_i) + F(x), \tag{17.2}$$

где по-прежнему

$$G(x) = \begin{cases} |x|^{2m-n}, & n = 2n_1; \\ |x|^{2m-n} \ln |x|, & n = 2n_1 + 1, \end{cases} \tag{17.3}$$

а функция $F(x) = F(x; m, \Delta_A, \Omega)$ полигармонична в I^n.

Из (17.3) следует, что при $|\alpha| = k$ (и соглашении $W_\infty^r = C^r$)

$$D^\alpha G(x) \in W_p^l(\mathbb{R}^n, \mathrm{loc}) \quad \Leftrightarrow \quad l - n/p < 2m - n - k, \tag{17.4}$$

причем при $p = \infty$, $l = 2m - n - k$ в окрестности нуля $|x| < \epsilon$

$$\operatorname{ess\,sup} |D^\alpha G(x)| = \begin{cases} \infty, & n = 2n_1, \\ O(1), & n = 2n_1 + 1. \end{cases} \tag{17.5}$$

Определим наихудшую гладкость $D^\alpha G$. Из (17.4) видно, что гладкость G понижается с ростом k, но в определении кратных сплайнов мы ограничены неравенством

$$k < m - n/2.$$

Максимальное значение $k = k_*$ при таком ограничении есть

$$k_* = m - (n/2 + 1), \quad n = 2n_1;$$
$$k_* = m - (n+1)/2, \quad n = 2n_1 - 1,$$

откуда для любого n

$$2m - n - k_* = m - (n_1 - 1) = n - \Big[\frac{n-1}{2}\Big]. \tag{17.6}$$

Таким образом, из (17.2)–(17.6) получаем, что при интерполяции в некоторых точках сетки Δ_A частных производных $f \in W_2^m(I^n)$ максимально возможного порядка $k = k_*$

$$s_A(f) \in W_p^l(I^n, \mathrm{loc}) \quad \Leftrightarrow \quad l - n/p < m - \Big[\frac{n-1}{2}\Big]. \tag{17.7}$$

В интересующем нас случае $n = 4$, $l = m - 1$ при $k_* = m - 3$ имеем

$$s_A(f) \in W_p^{m-1}(I^4, \mathrm{loc}) \quad \Leftrightarrow \quad m - 1 - n/p < m - 1.$$

С учетом (17.5) отсюда заключаем, что при $p = \infty$ если в паре $(t_i, A_i) \in \Delta_A$ множество A_i содержит α с $|\alpha| = k_* = m - 3$, то

$$\|D^{m-1} s_A(f)\|_{L_\infty[B(t_i,\rho)]} = \infty \quad \forall \rho > 0.$$

Теперь для любых $M, \epsilon > 0$ найдется точка $a \in B(t_i, 3\epsilon)$ такая, что для некоторого мультииндекса β, $|\beta| = m - 1$,

$$|D^\beta s_A(f, a)| > M,$$

что дает оценку нормы в (17.1).

Если же $3\epsilon < \underline{h}(\Delta) := \inf |t_i - t_j|$, то $B(a, 2\epsilon) \cap \Delta = \varnothing$, т.е. первое требование на B в (17.1) также удовлетворено. Теорема 3 доказана.

18. КОММЕНТАРИИ

18.1. Возможность полного решения. Как уже отмечалось в разд. 4, для доказательства гипотезы 1, а именно что при $n \ge 2$

$$s_\nu(f,m) \to f \quad \text{безусл. в } W^l_p(I^n) \quad \Leftrightarrow \quad (l,p) = (m,2),$$

достаточно построить примеры расходимости дискретных D^m-сплайнов лишь в трех случаях

$$\begin{array}{lllll} \text{i)} & l = m, & p \in [1,2), & m = 2m_1, & n = 2; \\ \text{ii)} & l = m+1, & p = 1, & & n = 2; \\ \text{iii)} & l = m-1, & p = \infty, & & n = 2. \end{array} \tag{18.1}$$

Как мы показали, эта задача сводится к подобной же для D^m-сплайнов Эрмита, являющихся не чем иным, как решением общей задачи Дирихле для полигармонического оператора в некоторой области Ω с границей Δ:

$$\nabla^{2m}\sigma = 0, \quad x \in \Omega \setminus \Delta, \qquad \sigma\Big|_\Delta = f\Big|_\Delta.$$

Пусть

$$T = T_{l,p}(\Omega):\ W^l_p(\Omega) \to W^l_p(\Omega), \quad T(f) = \sigma(f),$$

— оператор полигармонического продолжения граничных значений $f \in W^l_p(\Omega)$ на всю область. Тогда для доказательства гипотезы 1 достаточно показать, что

$$\sup_\Omega \|T_{l,p}(\Omega)\| = \infty, \quad (l,p) \ne (m,2), \quad n \ge 2.$$

За вычетом некоторых пар (l,p) мы доказали это, рассмотрев самые простейшие области:

1) для $l = m, m+1$ — кольцо,

2) для $l = m-1$ — по сути шар с выколотым центром.

Весьма правдоподобно, что чуть более экзотичные области (например, круг с выколотым отрезком) уже дадут контрпримеры для требуемых случаев (18.1).

18.2. Обобщение задачи. Можно поставить более общий вопрос о необходимых и достаточных условиях, при которых

$$s_\nu(f) \to f \quad \text{безусл. в } W^k_q(\Omega), \quad f \in W^l_p(\Omega). \tag{18.2}$$

По полученным результатам следует ожидать, что (18.2) имеет место тогда и только тогда, когда одновременно выполнены вложения

$$W^l_p(\Omega) \to W^m_2(\Omega) \to W^k_q(\Omega). \tag{18.3}$$

Наши результаты позволяют также предположить, что

1) если не выполнено первое вложение в (18.3), то найдется пример, в котором $s_\nu(f)$ расходятся уже в $L_1(\Omega)$;

2) если же при первом вложении отсутствует второе, то найдется пример, в котором $s_\nu(f)$ будут расходиться не только в $W^k_q(\Omega)$, но и в любом другом пространстве $W^{k'}_{q'}(\Omega)$, не содержащем $W^m_2(\Omega)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boor C. de.* The quasi-interpolant as a tool in elementary polynomial spline theory // Approximation theory / Ed. Lorentz G.G. N. Y.: Acad. Press, 1973. P. 269–276.
2. *Boor C. de.* On bounding spline interpolation // J. Approx. Theory. 1975. V. 14. P. 191–203.
3. *Boor C. de.* On a max-norm for the least-squares spline approximant // Approximation and function spaces / Ed. Ciesielski Z. N. Y., 1981. P. 163–175.
4. *Зматраков Н.Л.* Сходимость третьих производных интерполяционных кубических сплайнов в метриках L_p $(1 \le p \le \infty)$ // Мат. заметки. 1981. Т. 30, №1. С. 83–99.
5. *Зматраков Н.Л., Субботин Ю.Н.* Кратные интерполяционные сплайны степени $2k+1$ дефекта k // Тр. МИАН. 1983. Т. 164. С. 75–99.
6. *Levin A., Dyn N.* Construction of surface spline interpolants of scattered data over finite domain // RAIRO Anal. Numer. 1982. V. 16, N 3. P. 201–209.
7. *Матвеев О.В.* Сплайн-интерполяция функций нескольких переменных и базисы в пространствах Соболева // Тр. МИАН. 1992. Т. 198. С. 125–152.
8. *Матвеев О.В.* Аппроксимативные свойства интерполяционных D^m-сплайнов // ДАН СССР. 1991. Т. 321, №1. С. 14–18.
9. *Nord S.* Approximation properties of the spline fit // BIT. 1967. V. 7. P. 132–144.
10. *Shadrin A.Yu.* On L_p-boundedness of the L_2-projector onto splines // J. Approx. Theory. 1994. V. 77. P. 331–348.
11. *Ciesielski Z.* Properties of the orthomormal Franklin system. II // Stud. math. 1966. V. 27. P. 289–323.